iPB
機率學

04 一維機率分配模型

4-1 離散型機率分配

在現實生活中或工程上問題，有很多的隨機現象可以用少許的機率分佈模型來描述。例如，在一項新產品（保養品或藥）有效性的研究中，在所有使用者使用該產品而成功（滿意成治癒）的數量大致遵循二項式分佈。而在某工廠中測試來自一批選擇品項的樣本時，該樣本中的瑕疵品數，通常可用幾何或超幾何分佈來描述。另外，某一間飲料店在某一段時間的到客人數通常是隨機的，其可用波以松（卜瓦松，波氏）（poisson）分佈來描述等，本章中將分別介紹在離散系統與連續系統中常見的機率分配模型。

在日常生活中，很多我們遇到的事件都剛好只有兩種結果，例如生小孩不是男生就是女生，投硬幣不是正面就是反面，打靶不是打中就是打不中等等，這些只有兩種結果的隨機事件，我們可以將其簡化爲「成功」與「失敗」兩種，此種試驗稱爲 Bernoulli 試驗，以下將介紹此種試驗及其機率分配

一、Bernoulli 分配

1. 定義

定義 4.1： Bernoulli 試驗（Bernoulli trial）

設有一隨機試驗的出象只有二類，一類定義爲「成功」，另一類定義爲「失敗」，同時「成功」的機率固定不變，則此種隨機試驗稱爲 Bernoulli 試驗。重複而且獨立的進行 Bernoulli 試驗，稱爲 Bernoulli 過程（Bernoulli process）。

定義 4.2： 設隨機變數 X 爲 Bernoulli 試驗的出象，$X=1$ 表「成功」，$X=0$ 表「失敗」，同時「成功」的機率固定爲 p，若 X 的機率質量函數爲

$$f_X(x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & ; x=0,1 \\ 0 & ;\text{其他} \end{cases}\text{，且 } 0\le p\le 1$$

則稱 X 爲具參數 p 的 Bernoulli 分配，一般表成 $X\sim \text{Ber}(p)$，如圖 4-1。

其累積分配函數爲 $F_X(x)=\begin{cases} 0 & ; x<0 \\ 1-p & ; 0\le x<1 \\ 1 & ; x\ge 1 \end{cases}$，如圖 4-2。

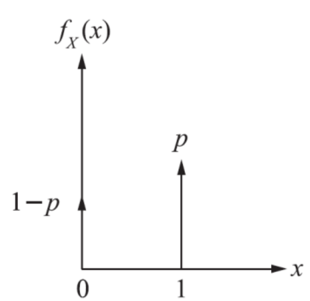


圖 4-1

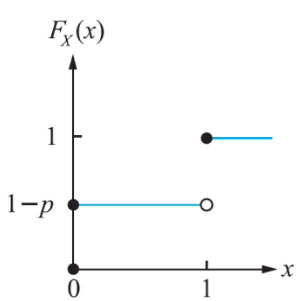


圖 4-2

4-1
4-2

Note：硬幣投擲可以視爲是一種白努利（Bernoulli）試驗，其中隨機變數 X 表示出現正面，其機率爲 p。

2. 性質

定理 4.1：設 $X \sim \text{Ber}(p)$，令 $q = 1 - p$，則

(1) 期望值：$E[X] = p$。

(2) 變異數：$\text{Var}(X) = p(1 - p) = pq$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = pe^t + (1 - p) = pe^t + q$。

4-1
4-2

二、二項分配（Binomial Distribution）

在日常生活中通常不會只做一次 Bernoulli 試驗，一般會進行一連串的 Bernoulli 試驗，例如進行射擊打靶或進行籃球投籃，每一次打中的機率爲 p，做一次此種試驗即爲 Bernoulli 試驗，而重覆打靶或投籃 n 次，即進行 Bernoulli 試驗 n 次，其會產生一個新的隨機變數 X 表示這 n 次試驗成功的次數，則 X 會呈現一種新的分配稱爲二項分配，詳細介紹如下：

1. 定義

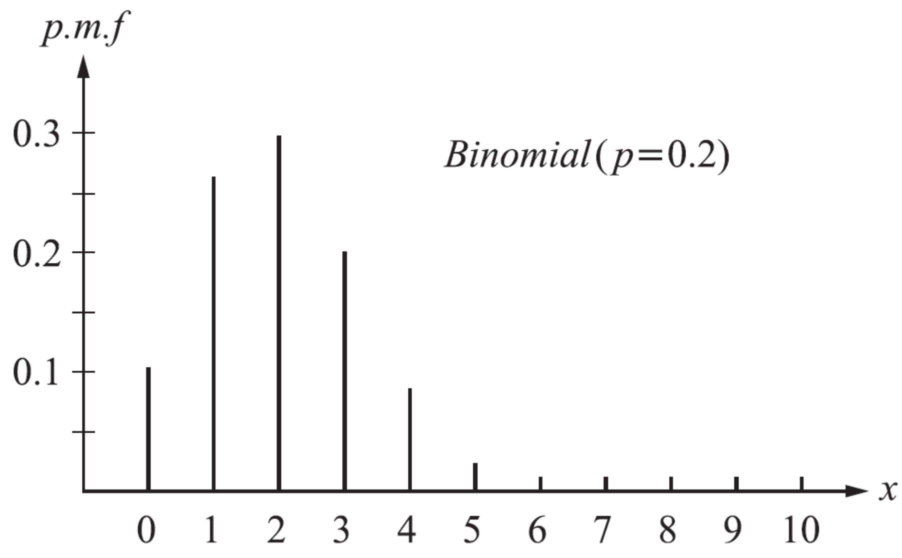
定義 4.3：設隨機變數 X 爲 Bernoulli 過程中「成功」的次數，若 n 表示重複 Bernoulli 試驗的次數，p（$0 < p < 1$）爲成功的機率，$q = 1 - p$ 爲失敗的機率，則 X 的機率質量函數爲

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & ; x = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n \\ 0 & ;\text{其他} \end{cases}$$

一般稱 X 具參數(n, p)的二項分配，表成 $X \sim B(n, p)$。

4-1
4-2

當參數 $p = 0.5$ 時，二項分配的機率質量函數是對稱的，但當 $p < 0.5$ 時，二項分配呈現左偏，$p > 0.5$ 時，呈現右偏，其圖形如圖 4-3。



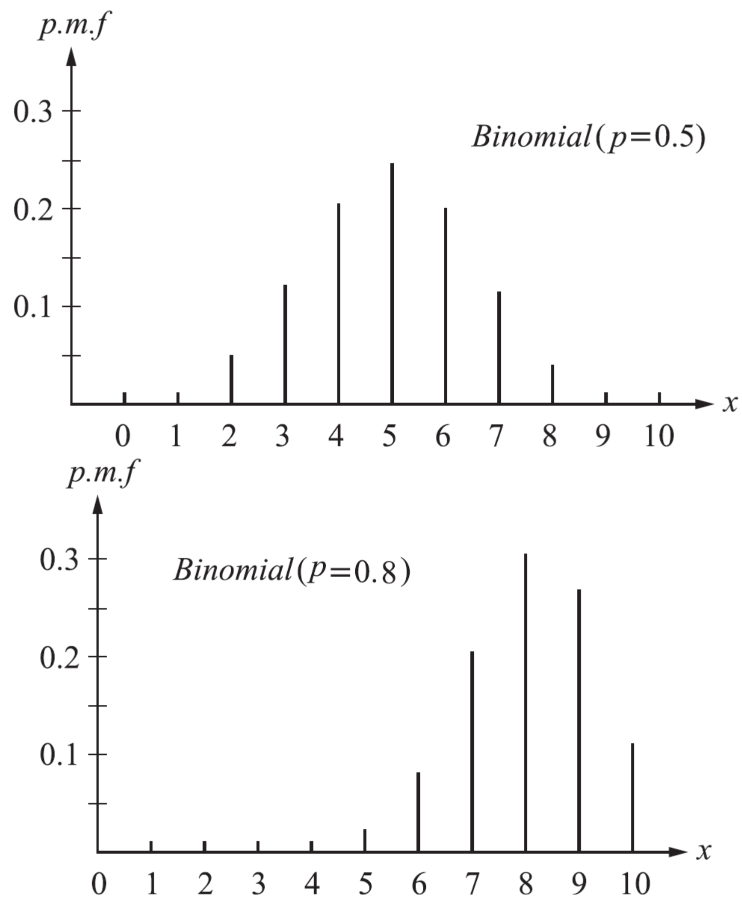

p.m.f
0.3
0.2
0.1
Binomial(p=0.5)
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
p.m.f
0.3
0.2
0.1
Binomial(p=0.8)
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

圖 4-3

4-1
4-2

例如：擲一公正骰子 3 次，至少出 2 次點數爲「1」的機率，我們可令隨機變數 X 表示出現 1 點的次數，則 $X \sim B(3, \frac{1}{6})$

則 $f_X(x) = C_x^n \times p^x \times (1-p)^{n-x}$，其中 $p = \frac{1}{6}$、$n = 3$，

故所求爲 $P\{X \geq 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$

$$= C_2^3 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6}) + C_3^3 \times (\frac{1}{6})^3$$ 。

4-1
4-2

上面這個數值計算比較簡單，可以直接算，但若 n 較大，則會很難計算，此時可利用附錄三的查表來求。舉例說明如下：

某同學的投籃命中率是三成，則該同學投籃十次，至少中五次的機率為何？依二項分配可知（令命中數 X），所求為 $P\{X\geq 5\}=1-P\{X\leq 4\}$，由附錄三查表可知 $P\{X\geq 5\}=1-0.850=0.15$。**Note**：本例子中隨機變數 $X\sim B(10, 0.3)$。

又例如某產品的瑕疵機率為 0.05，若從中取出 20 個，要求至少有 4 個瑕疵的機率？若令 r.v. Y 表示瑕疵數，則 $Y\sim B(20, 0.05)$，所求 $P(Y\geq 4)=1-P(Y\leq 3)$，由附錄三查表可知 $P(Y\geq 4)=1-P(Y\leq 3)=1-0.984=0.016$。

2. 性質

定理 4.2：設 $X\sim B(n, p)$，令 $q=1-p$，則

(1) 期望值：$E[X]=np$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X)=np(1-p)=npq$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t)=[pe^t+(1-p)]^n=(pe^t+q)^n$。

(4) 可加性：若 $X_1\sim B(n_1, p)$、$X_2\sim B(n_2, p)$，則

$$X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2, p)。$$

4-1
4-2

範例 1

設 X 是個以 n 及 p 為兩參數的二項分配隨機變數，其中 n 代表獨立重複從事簡單 Bernoulli 試驗的次數，p 為每次試驗時的成功機率，請問 X 的期望值與標準差？

解

因 X 的機率分佈函數為

$$f(x)=\begin{cases} C_x^n p^x(1-p)^{n-x} & ; x=0,1,2,\cdots\cdots,n \\ 0 & ;\text{其他} \end{cases}$$

故 X 的動差為

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{n} e^{tx}C_x^n p^x(1-p)^{n-x}=(pe^t+1-p)^n，$$

令 $D(t)=\ln M_X(t)=\ln(pe^t+1-p)^n=n\ln(pe^t+1-p)$，

且 $D'(t)=\dfrac{npe^t}{pe^t+1-p}$，$D''(t)=\dfrac{npe^t(pe^t+1-p)-n(pe^t)^2}{(pe^t+1-p)^2}$，

故 $E[X]=D'(0)=np$，

$\text{Var}(X)=D''(0)=np-np^2=np(1-p)$。

範例 2

投擲一個不公平的硬幣 6 次，設出現正面的機率爲 $\frac{2}{3}$，且每次投擲都是獨立試驗，則出現正面兩次的機率爲何？

解

令 r.v. X 表示出現正面的次數，則 $f_X(x)=C_x^6(\frac{2}{3})^x(\frac{1}{3})^{6-x}$ ；$x=0, 1, 2,\ \cdots\cdots$，

則 $P(X=2)=C_2^6(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^4=\frac{60}{3^6}=0.08$ 。

4-1
4-2

範例 3

某一家大賣場進行大拍賣，若此大拍賣期間每個顧客消費超過 2000 元的機率為 60%，現在有 10 個客人，請問此 10 個客人於大拍賣期間會消費超過 2000 元之人數的機率分配為何？其期望值和變異數為何？

解

令 r.v. X 表示 10 個客人中消費超過 2000 元之人數，則 $X \sim B(10, 0.6)$，

(1) $f_X(x) = C_x^{10}(0.6)^x \times (0.4)^{10-x}$，$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots, 10$。

(2) $E[X] = 10 \times 0.6 = 6$，$\mathrm{Var}[X] = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$。

4-1
4-2

範例 4

某個房間需要同時點亮 5 只燈泡，亮度才算足夠，已知所購買的某品牌燈泡存在 5%的瑕疵率：

(1) 若同時買進該品牌燈泡 10 只，請問安裝後就能將房間點得夠亮的機率為何？

(2) 若想安裝後就能將房間點得夠亮的機率達到至少 90%，請問需一次購買多少只該品牌燈泡？

解

(1) 令隨機變數 X 為買到好的電燈泡之個數（10 個中），故 $X \sim B(10, p)$，
$p = 1 - 0.05 = 0.95$、$1 - p = 0.05$，且 $f_X(x) = C_x^{10} p^x (1-p)^{10-x}$；$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots, 10$，
則 $P\{X \geq 5\} = \sum_{x=5}^{10} C_x^{10} p^x (1-p)^{10-x} = 0.999997$。

(2) 令隨機變數 X 為買 n 個電燈泡中好的電燈泡之個數，故 $X \sim B(n, p)$，
$p = 0.95$、$1 - p = 0.05$ 且 $f_X(x) = C_x^{10} p^x (1-p)^{n-x}$；$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots, 10$，
則 $n = 5 \Rightarrow P\{X = 5\} = (0.95)^5 = 0.774$，
$n = 6 \Rightarrow P\{X \geq 5\} = C_5^6 (0.95)^5 (0.05) + (0.95)^6 = 0.967$，（由附錄三查表可知）
$n = 7$ 時，$P\{X \geq 5\} = C_5^7 (0.95)^5 (0.05)^2 + C_6^7 (0.95)^6 (0.05) + C_7^7 (0.95)^6$
$= 0.996$，（由附錄三查表可知）
故要有足夠亮度的機率超過 90%時，至少要買 6 個電燈泡。

範例 5

某罈子裡裝有紅球 3 顆和黑球 7 顆，現從罈中抽取一球，然後擲一枚銅板 1 次，但方式是：如抽到紅球則擲均質銅板一枚，如抽到黑球則擲出現頭像機率為 $\frac{1}{3}$ 的非均質銅板一枚，請問若銅板共擲了 4 次，則出現頭像次數的期望值為何？

解

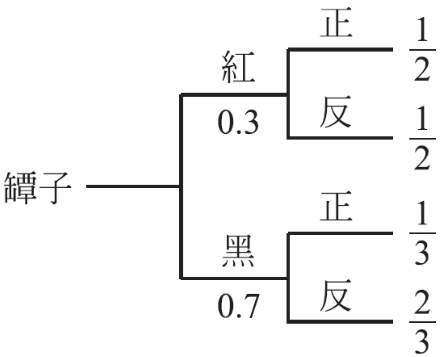
令 X_i 表示擲第 i 次硬幣為正面的次數（$i=1, 2, 3, 4$），

故 $X_i \sim B(1, p)$，

故 $p=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{60}$，

再令 $Y=X_1+X_2+X_3+X_4$，則 $Y\sim B(4, p)$，

故 $E[Y]=np=4\times\frac{23}{60}=\frac{23}{15}$。



4-1
4-2

三、負二項分配（Negative Binomial Distribution）

我們在前面學了二項分配，其主要是在描述 n 次 Bernoulli 試驗中成功次數的機率分配，然而在實際物理系統中，我們常常需要去研究達到 r 次成功所需試驗的次數，例如：我們需要了解每次使用其故障率爲 p 之機器，在機器故障前，能夠工作的天數或是某運動員每次參加比賽得獎的機率爲 p，若其要獲得 r 個獎牌前，其必須參加比賽的次數，這些的情形都會用到以下介紹的負二項分配，此分配又稱巴斯卡分配（Bascal Distribution，1623～1662，法國）。

1. 定義

定義 4.4：設隨機變數 X 爲 Bernoulli 過程中，到達第 r 次「成功」所須的試驗總次數，若 $P\,(0<p<1)$爲成功的機率，則 X 的機率質量函數爲

$$f_X(x)=\begin{cases}\dbinom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r} & ,x=r,r+1,\cdots\cdots,n\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

一般 X 具參數(r,p)的負二項分配，表成 $X\sim NB(r,p)$。

4-1
4-2

Note：我們以投擲公正硬幣爲例，二項分配就是投擲的次數固定，看其中出現幾次正面，而負二項分配則是要求出現的正面次數固定，看需要投擲幾次。

範例 6

假設台北市民養寵物的機率爲 0.3，若隨機電話抽訪台北市民，則抽訪到第 10 個市民時，此市民是第 5 個有養寵物之機率爲何？

解

令 r.v. X 表示抽訪到第 5 個有養寵物之市民所需電話抽訪的市民人數，

則 $X \sim NB(5, 0.3)$，$f_X(x) = C_4^{x-1} \times (0.3)^5 \times (0.7)^{x-5}$，$x = 5, 6, 7, \cdots\cdots$，

則 $P(X = 10) = C_4^9 (0.3)^5 \times (0.7)^5 = 0.0515$。

4-1
4-2

2. 性質

定理 4.3：設 $X \sim NB(r, p)$，令 $q = 1 - p$，則

(1) 期望值：$E[X] = \dfrac{r}{p}$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{rq}{p^2}$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = \left(\dfrac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r \quad (t < -\ln q)$。

(4) 可加性：若 $X_1 \sim NB(r_1, p)$、$X_2 \sim NB(r_2, p)$，則

$X_1 + X_2 \sim NB(r_1 + r_2, p)$

4-1
4-2

範例 7

假設某電信公司傳送每個數字的錯誤機率爲 0.1 且每個數字的傳送爲獨立事件，則

(1) 傳送第 10 個數字出現第 3 次錯誤的機率爲何？

(2) 出現第 3 個錯誤數字時，所傳送數字個數的期望值與變異數？

解

(1) 令 r.v. X 爲出現第 3 個錯誤所傳送的數字個數，則

$X \sim NB(3, 0.1)$，則

$$P(X=10)=C_{3-1}^{10-1}\times(0.1)^3\times(1-0.1)^7=C_2^9\times(0.1)^3\times(0.9)^7$$

$$=0.0172。$$

(2) $E[X]=\dfrac{3}{0.1}=30$；$\mathrm{Var}[X]=\dfrac{3\times 0.9}{(0.1)^2}=270$。

範例 8

回收用過的大量 iPhone 7 手機中，有 20%需要換螢幕，若某手機維修師父帶著三套螢幕材料，以不放回的方式隨機抽取回收筒中的 iPhone 7 手機，若需費時 10 分鐘檢查好的手機螢幕，且需花 30 分鐘檢查並更換不好的，試求用完三套材料螢幕所需時間的期望值與標準差。

解

令 r.v. X 爲處理完第三個不好的手機螢幕所需的檢查次數，則

$X \sim NB(3, 0.2)$，

因此用完三個螢幕材料的所需時間，

$T = 10X + 3\times 20 = 10X + 60$，

(1) $E(T) = 10E(X) + 60 = 10\times 3\times \dfrac{1}{0.2} + 60 = 210$。

(2) $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(10X + 60) = 10^2\,\mathrm{Var}(X)$

$$= 10^2 \times 3\times \frac{1-0.2}{(0.2)^2} = 6000，$$

$\sigma = \sqrt{6000} = 77.46$。

4-1
4-2

範例 9

擲一枚均質硬幣直到連續出現兩個反面為止，請計算所需投擲次數的期望值。

解

令隨機變數 X 表示所需試驗的次數，且成功的機率為 p，失敗的機率為 q，則

$X \sim NB(r, p)$，$r = 2$、$p = \dfrac{1}{2}$、$q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$，故機率密度函數為

$f_X(x) = C_{r-1}^{x-1} p^r q^{x-r}$，$x = r, r+1, r+2, \cdots\cdots$

且 $\sum_{x=r}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=r}^{\infty} C_{r-1}^{x-1} p^r q^{x-r} = 1$，

$$\begin{aligned}
\text{則 } E[X] &= \sum_{x=r}^{\infty} x f_X(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x C_{r-1}^{x-1} p^r q^{x-r} \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} x \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} p^r q^{x-r} \\
&= \frac{r}{p} \sum_{x=r}^{\infty} \frac{x!}{r!(x-r)!} p^{r+1} q^{x-r} \\
&= \frac{r}{p} \sum_{x=r}^{\infty} C_r^x p^{r+1} q^{x-r} \qquad (\text{令 } y = x+1\text{、}k = r+1) \\
&= \frac{r}{p} \sum_{y=k}^{\infty} C_{k-1}^{y-1} p^k q^{y-k} \\
&= \frac{r}{p} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \text{。}
\end{aligned}$$

Note：本題是利用詳細推導來計算期望值，若是直接用公式，則 $E[X] = \dfrac{r}{p} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4$。

4-1
4-2

四、幾何分配（Geometric Distribution）

在日常生活中，我們常常會遇到 $r = 1$ 的負二項分配，就例如擲一出現正面機率爲 p 的硬幣，若每次投擲均爲獨立，若我們想知道持續投擲多少次才會出現第一次正面，或是已經投擲了 m 次未出現正面，則再投擲 n 次仍未出現正面的機率是否相同等問題，這些問題就會在接下來的幾何分配中，介紹如下。

1. 定義

定義 4.5： 設負二項分配的 $r = 1$ 時，又稱爲幾何分配，即隨機變數 X 爲 Bernoulli 過程中，到達第 1 次「成功」所須的試驗總次數，設 $p\ (0 < p < 1)$爲成功的機率，則 X 的機率質量函數爲

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & ,x = 1, 2, \cdots\cdots \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

一般 $X \sim Geo(p)$。

4-1
4-2

範例 10

如果有一個電話推銷員平均每打 10 通電話推銷會有一位推銷產品成功，若這個推銷員持續一直打電話推銷，則打到第 5 通電話推銷剛好是第一位同意購買產品的機率爲何？

解

令 r.v. $X \sim Geo(0.1)$，則 $P(X=5)=0.1\times(0.9)^4=0.06561$。

4-1
4-2

2. 性質

定理 4.4： 設 $X \sim Geo(p)$，令 $q = 1 - p$，則

(1) 期望值：$E[X] = \dfrac{1}{p}$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{q}{p^2}$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1 - qe^t}$。

(4) 無記憶性*(Memoryless property)：

即 $P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n)$

其中 m、n 為非負的整數。

所謂無記憶性，是指進行 Bernoulli 試驗前 m 次均未成功下，再試驗 n 次仍未成功的機率與重新試驗 n 次未成功的機率相同，換句話說就是之前一開始所擲 m 次未成功的試驗是做白工，此觀念之詳細證明請參閱範例 14。

4-1
4-2

範例 11

某國家證照考試的通過率為 0.2，則

(1) 某人考第 11 次才取得該證照的機率？

(2) 請問取得該證照的考試次數期望值與變異數為何？

解

(1) 設 r.v. X 為考試次數，則 $X \sim Geo(0.2)$，

$P(X=11)=0.2\times(0.8)^{10}=0.0215$。

(2) $E[X]=\dfrac{1}{0.2}=5$；$\mathrm{Var}[X]=\dfrac{0.8}{(0.2)^2}=20$。

4-1
4-2

範例 12

某產品的製程中，已知每 100 個產品會有一個不良品，若對一批該產品進行檢試，

(1) 檢驗到第 5 個產品才發現第一個不良品的機率？

(2) 檢驗到第 1 個不良品所需之檢驗產品的個數期望值與變異數為何？

解

設 r.v. X 為檢驗到第 1 個不良品所需的檢驗次數，則 $X \sim Geo(0.01)$，

(1) $P(X=5)=(0.01)\times(0.99)^4=0.0096$。

(2) $E[X]=\dfrac{1}{0.01}=100$，$\mathrm{Var}[X]=\dfrac{1-0.01}{(0.01)^2}=9900$。

4-1
4-2

範例 13

設 $X \sim Geo(p)$，且

$$f_X(x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & ;\ x=1,2,\cdots\cdots \\ 0 & ;\ \text{其他} \end{cases}$$

求 X 的動差生成函數 $M_X(t)$。

解

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}f_X(x)$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}p(1-p)^{x-1}=\sum_{x=0}^{\infty}e^{t(x+1)}p(1-p)^{x}$$

$$=pe^t\sum_{x=0}^{\infty}[(1-p)e^t]^x=pe^t\frac{1}{1-(1-p)e^t}\ 。$$

範例 14

有一個不連續隨機變數，數值空間 $S=\{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$；設 X 爲無記憶性；若：

$$P[X>n+m \mid X>n]=P[X>m]$$

請證明，若 X 爲幾何隨機變數，且機率質量函數爲 $P[X=k]=p(1-p)^k, k\geq 0$，則 X 爲無記憶性。

4-1
4-2

解

因 $X \sim Geo(p)$，故 X 的機率密度函數爲

$f(x)=p(1-p)^{x-1}$，$x=1, 2, 3, \cdots\cdots$

又 $P(X>m+n \mid X>m)=\dfrac{P(X>m+n)}{P(X>m)}=\dfrac{\sum_{x=m+n+1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}}{\sum_{x=m+1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}}$

$$=\frac{p(1-p)^{m+n}+p(1-p)^{m+n+1}+\cdots\cdots}{p(1-p)^{m}+p(1-p)^{m+1}+\cdots\cdots}$$

$$=(1-p)^n$$

且 $P(X>n)=\sum_{x=n+1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}$

$$=p(1-p)^n+p(1-p)^{n+1}+p(1-p)^{n+2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}$$

$$=(1-p)^n$$，

故 $P(X>m+n \mid X>m)=P(X>n)$，即幾何分配無記憶性。

Note：幾何 r.v. X 與無記憶性互爲若且唯若的性質。

4-1
4-2

範例 15

某公司將手中六種收藏品裝入產品盒打包，而且是按照相等的比率，每個盒子各裝進一個；若某顧客決意將六種收集品一次全收集完整，請問他預計需購買多少數目個產品盒才夠？

解

令 X_k 表示已收集$(k-1)$種，直到第 k 種亦收集到所需購買的數目，則 $X_K \sim Geo(p_k)$，且 $p_k = \dfrac{6-(k-1)}{6}$、$E[X_k] = \dfrac{1}{p_k}$，故 6 種全收集到所需購買的數目 X 為

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1}$$

$$= 14.7$$ 。

五、超幾何分配（Hypergeometric Distribution）

假設某大量的產品（母體）有 n 件，其中 m 個爲不良品，$(n-m)$個爲良品，以取後不放回的方式取出 k 個產品，若 r.v. X 表示取到不良品的個數，則 X 可能爲 0, 1, 2, ⋯⋯, min(m, k)，則此時的 r.v. X 會呈現超幾何的機率分配，其介紹如下：

1. 定義

定義 4.6：設一個母體中含有 n 個樣本，其中有 m 個定義爲「成功」，另外 $n-m$ 個定義爲「失敗」，利用抽後不放回（without replacement）抽樣方法，抽出 k 個樣本，隨機變數 X 定義爲「成功」的次數，則 X 的機率質量函數爲

$$f_X(x)=\frac{\binom{m}{x}\binom{n-m}{k-x}}{\binom{n}{k}}\quad x=0,1,2,\cdots\cdots,k$$

一般稱 X 具參數(n, m, k)的超幾何分配，表成 $X \sim HG(n, m, k)$。

4-1
4-2

Note：當 n 很大（$n\to\infty$），此時「放回」與「不放回」近乎沒有差別且 k 與 $p=\frac{m}{n}$ 很小，則此時 $HG(n, m, k)$幾乎等於二項分配 $B(n, p)$，即大母體、小樣本時，超幾何分配幾乎等於二項分配，即 $\frac{C_x^m \times C_{k-x}^{n-m}}{C_k^n} \xrightarrow{\text{趨近}} C_x^m \times p^x \times (1-p)^{m-x}$。

2. 性質

定理 4.5：設 $X \sim HG(n, m, k)$，則

(1) 期望值：$E[X]=k\frac{m}{n}$。

(2) 變異數：$\operatorname{Var}(X)=k(\frac{m}{n})(1-\frac{m}{n})(\frac{n-k}{n-1})$。

(3) 若 $HG(n, m, k)$抽後不放回，改爲抽後放回，則變成 $B(n, p)$，其中 $p=\frac{m}{n}$。

4-1
4-2

範例 16

設有一批 20 個 IC 中，有 4 個不良品，其中抽出 5 顆 IC 做檢查，若有超過一個爲不良品則退貨，請問退貨的機率爲何？且此 5 個 IC 樣本中，不良品的期望值與變異數爲何？

解

令 r.v. X 爲不良品個數，則 $X \sim HG(20, 4, 5)$，

(1) $P(\text{退貨}) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

$$= 1 - \frac{C_0^4 C_5^{16}}{C_5^{20}} - \frac{C_1^4 C_4^{16}}{C_5^{20}} = \frac{241}{969} = 0.2487$$ 。

(2) $E[X] = 5 \times \dfrac{4}{20} = 1$；

$$\text{Var}[X] = 5 \times \frac{4}{20} \times (1 - \frac{4}{20}) \times (\frac{20-5}{20-1}) = \frac{12}{19} = 0.632$$ 。

4-1
4-2

範例 17

某製造商辦理出貨時是以每 100 個項目作一批，定期發貨；根據該製造商記錄資料，出貨項目的瑕疵率為 5%。

(1) 以抽取後不放回的方式從某批貨中抽取 5 件樣本，請問 5 件全非瑕疵品的機率為何？

(2) 有至少 2 件瑕疵品的機率又為何？

解

(1) 設隨機變數 X 為 5 個樣品中瑕疵品的個數，

則 $X \sim HG\ (N=100，k=5，n=5)$

故 $P(X=0)=\dfrac{C_0^5 C_5^{95}}{C_5^{100}}=0.7696$。

(2) $P(X \geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$

$$=1-\frac{C_0^5 C_5^{95}}{C_5^{100}}-\frac{C_1^5 C_4^{95}}{C_5^{100}}=0.019。$$

4-1
4-2

範例 18

設有一批 300 個主機板，其中 5%為不良品，自其中取出 5 個加以檢驗，請利用超幾何分配與二項分配計算其中至少有一個不良品的機率為何？並比較其差異。

解

令 r.v. X 表示樣本中不良品數目，

(1) $X \sim HG(300, 15, 5) \rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dfrac{C_0^{15} C_5^{285}}{C_5^{300}} = 1 - 0.7724 = 0.2276$。

(2) $X \sim B(5, 0.05) \rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_0^5 (0.05)^0 \times (0.95)^5 = 0.226$。

由以上可知，在大母體小樣本下，超幾何分配與二項分配所得之結果幾乎一致。

4-1
4-2

六、Poisson 分配（卜瓦松，波以松，波氏分配）

在日常生活中，我們常常會希望看看在某一段時間內，該事件發生的次數，例如：早餐店的老板希望知道 10 分鐘內來買早餐的人數，百貨公司的主管希望了解一小時內的到客人數，停車廠管理公司希望了解半小時內停車的數量等等，這些現象都可以利用下面介紹的 Poisson 分配來描述，介紹如下：

1. 定義

定義 4.7：Poisson 過程（Process）

一個隨機試驗具有下面性質，稱爲是 Poisson 過程

(1) 在指定的區域裡或時間的區段內，事件發生數目獨立於其他的區域或時間區段。

(2) 若區間很小時，單一事件發生的機率與該區間成正比。

(3) 若區間很小時，在該區間超過一個事件發生的機率小到可以忽略。

定義 4.8： 若隨機變數 X 代表給定時間或指定區域內所發生的出象數目，其機率質量函數為

$$f_X(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\qquad x=0,1,2,\cdots\cdots$$

其中 λ 為單位時間或區域內事件發生的次數，則稱 X 具參數 λ 的 Poisson 分配，表成 $X\sim Poi(\lambda)$。

Note：一般在處理 Poisson 分配時會加入時間 t，即 λ 為單位時間內有幾個事件發生（發生率），則平均（λt）個事件發生的 Poisson 分配機率密度函數為 $f_X(x)=\dfrac{e^{-\lambda t}\times(\lambda t)^{x}}{x!}$；$x=0,1,2,\cdots\cdots$

4-1
4-2

2. 性質

定理 4.6：設 $X \sim Poi(\lambda)$，則

(1) 期望值：$E[X] = \lambda$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X) = \lambda$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$。

(4) 可加性：若 $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$、$X_2 \sim Poi(\lambda_2)$，則 $X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$。

(5) Poisson 分配可視為二項分配的極限，即 n 夠大，而 p 夠小，則 $\lim_{n \to \infty} B(n, p) = Poi(\lambda)$。（其中 $\lambda = np$）

即試驗次數非常多，且事件發生的機率十分低，此時二項分配可以視為 Poisson 分配。如一本書中，每一頁打錯的字數，或某一公路上每天發生的車禍數。

4-1
4-2

Note：在計算 Poisson 分配時可以利用附錄四的查表來計算，例如台灣的機車事故盛行率每一萬人口中爲 0.00025，故發生機車事故的平均人數 $\lambda = np = 10000 \times (0.00025) = 2.5$，則

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2.5} \times (2.5)^{x}}{x!}$$

則每萬人中超過六人發生機車事故的機率爲 $P(X \geq 7)$，由附錄四查表可知

$P(X \geq 7) = 1 - 0.9858 = 0.0142$。

4-1
4-2

範例 19

某便利商店每 3 分鐘內平均有 3 人進來消費，且 3 分鐘內到店內消費的人數符合 Poisson 分配，則

(1) 3 分鐘內剛好有 3 人到商店內消費的機率爲何？

(2) 6 分鐘內剛好有 5 人到商店內消費的機率爲何？

(3) 6 分鐘內到商店消費的人數在 4 人以下的機率爲何？

解

令 r.v. X 表示 3 分鐘內到商店內消費的人數，

r.v. Y 表示 6 分鐘內到商店內消費的人數，

則 $X \sim Poi(3)$，$Y \sim Poi(6)$，

$$f_X(x) = \frac{e^{-3} \times 3^x}{x!}\text{，} x = 0, 1, 2, \cdots\cdots\text{，} f_Y(y) = \frac{e^{-6} \times 6^y}{y!}\text{，} y = 0, 1, 2, \cdots\cdots\text{，}$$

(1) $P(X = 3) = f_X(3) = \dfrac{e^{-3} \times 3^3}{3!} = 0.224$。

(2) $P(Y = 5) = f_Y(5) = \dfrac{e^{-6} \times 6^5}{5!} = 0.1606$。

(3) $P(Y \le 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)$

$$= \sum_{y=0}^{4} \frac{e^{-6} \times 6^y}{y!} = 0.2851\text{。}$$

（本小題可利用附錄四之查表求得）

4-1
4-2

範例 20

設 $X \sim Poi(\lambda)$，且

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & ; x = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ 0 & ;\text{其他} \end{cases}$$

求 X 的動差生成函數 $M_X(t)$。

解

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$ 。

4-1

4-2

範例 21

設某波氏隨機變數的參數爲 a，a 的數值爲 0, 1, $\cdots$，機率爲 $P(x=k)=e^{-a}\dfrac{a^k}{k!}$，請問隨機變數 X 的均數及變異數爲何。

解

因 $M_X(t)=e^{a(e^t-1)}$，故 $E[X]=M'_X(0)=a$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=M''_X(0)-[M_X(0)]^2\\&=a+a^2-a^2=a\text{。}\end{aligned}$$

4-1
4-2

範例 22

某城市平均 1 小時內會發生一件竊案，令 r.v. X 表示 1 小時內發生竊案的件數，且 r.v. X 滿足 Poisson 分配，則

(1) 該城市 1 小時內完全沒有竊案發生的機率？

(2) 該城市 1 小時內發生超過兩次竊案的機率？

(3) 該城市 2 小時內恰巧只發生一次竊案的機率？

解

$X \sim Poi(1)$，則 $f_X(x) = \dfrac{e^{-1} \times 1^x}{x!} = \dfrac{e^{-1}}{x!}$，$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots$，

(1) $P(X = 0) = \dfrac{e^{-1}}{0!} = \dfrac{1}{e} = 0.3679$。

(2) $P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$

$$= 1 - \frac{e^{-1}}{0!} - \frac{e^{-1}}{1!} - \frac{e^{-1}}{2!} = 0.0803 \text{。}$$

(3) 令 r.v. Y 為 2 小時內發生竊案件數，則

$Y \sim Poi(2) \rightarrow f_Y(y) = \dfrac{e^{-2} \times 2^y}{y!}$，

$P(Y = 1) = \dfrac{e^{-2} \times 2^1}{1!} = \dfrac{2}{e^2} = 0.2707$。

範例 23

螺絲生產作業，以 100 根螺絲釘做一批，若瑕疵品的出現機率為 $p = 0.01$，則一批螺絲釘出現 2 根以上瑕疵品的機率為何？

解

令隨機變數 X 為 100 根螺絲釘中瑕疵品之數目，因

$\lambda = np = 100 \times 0.01 = 1$

且 n 很大，故 $X \sim B(100, 0.01)$，則 $X \sim Poi(1)$，則 $f_X(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$，故

$$\begin{aligned}
\text{所求} &= P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\
&= 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2!}e^{-1} \\
&= 1 - \frac{5}{2} \times \frac{1}{e}\text{。}
\end{aligned}$$

4-1
4-2

範例 24

某停車場平均每分鐘有兩輛車駛入停放，請問任和特定分鐘內，有 4 輛或更多車輛車魚貫駛入停放的機率是多少？

(A) 0.875 (B) 0.643 (C) 0.143 (D) 0.357 (E) 0.5。

解

設隨機變數 X 為每分鐘停車數，故 $X \sim Poi(2)$，即 $\lambda = 2$，且

$f_X(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ （$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots$），則

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\ &= 1 - 2e^{-2} - e^{-2}\frac{2^2}{2!} - e^{-2}\frac{2^3}{3!} \\ &= 1 - \frac{19}{3}e^{-2} \approx 0.143 \text{。} \end{aligned}$$

4-2 連續型機率分配

前面一小節中，我們了解各種離散型的機率分配模型，接下來這個小節將介紹各種常見的連續型機率分配。

一、常態分配或 Gaussian 分配（Normal or Gaussian Distribution）

常態分配在機率學與統計學中是非常重要的分配，其分配圖形呈現鐘形曲線，此曲線是在 18 世紀由法國數學家棣美弗（De Moivre）提出，其後由高斯（Carl Friedrich Gauss）加以延伸推廣，其可以用來描述許多大自然、社會、工業或商業的現象與行爲，例如：可以描述學生考試的成績分配等，以下將詳細介紹常態分配。

4-1
4-2

1. 定義

定義 4.9： 若連續型隨機變數 X，其機率密度函數爲

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\text{，}-\infty<x<\infty$$

其中 $\mu\in\mathrm{R}$、$\sigma>0$，

則稱 X 具常態分配（normal distribution），或 Laplace-Gauss 分配，一般表成 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。當 $\mu=0$、$\sigma=1$ 時，稱 X 具標準常態分配（standard normal distribution），記爲 $X\sim N(0,1)$，如圖 4-4。

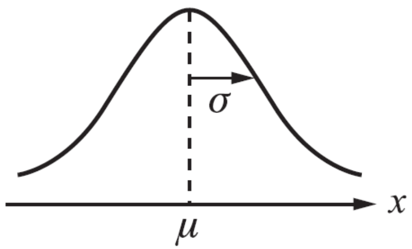


圖 4-4

標準常態分配 $X \sim N(0, 1)$，其機率密度函數 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ； $-\infty < x < \infty$ ，計算其機率 $P(X < x)$時會存在 $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ 的積分，此積分無法直接求出，可以利用 $\phi(x)$ 函數來表示如下：

4-1
4-2

$P(X \le x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ ，其表示如圖 4-5 中鋪色區域面積。

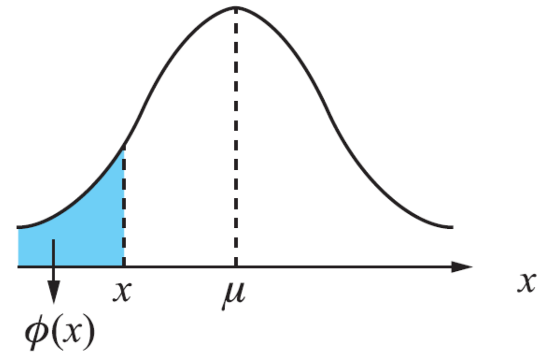


圖 4-5

有關 $\phi(x)$ 的函數值利用附錄五查表可得，而 $\phi(x)$ 具有下列性質，

(1) 若 $x_1 < x_2$，則 $\phi(x_1) < \phi(x_2)$ 。

(2) $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ 。

(3) $\phi(\infty) = 1$ 。

4-1
4-2

Note：

(1) 若隨機變數 X 不是標準常態分配，則可以另用變數變換將其化成標準常態分配，則若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，令 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 爲標準常態分配，

則 $\phi(x) = P(Z \le x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$；$Q(t) = P(Z \ge x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = 1 - \phi(x)$

且 $P(a \le x \le b) = P\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \le \dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$= Q\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$

其中 ϕ 與 Q 之常用函數可查表附錄五，其中 $\phi(x)$ 與 $Q(x)$之圖形如圖 4-6。

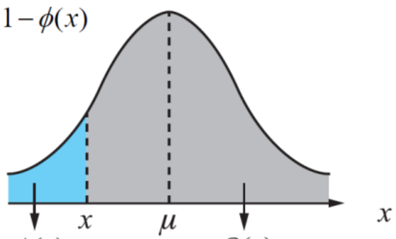


圖 4-6

(2) 二項分配在 $n \to \infty$ 時，可近似爲常態分配。

(3) $\sigma_1 = \sigma_2$，如圖 4-7。

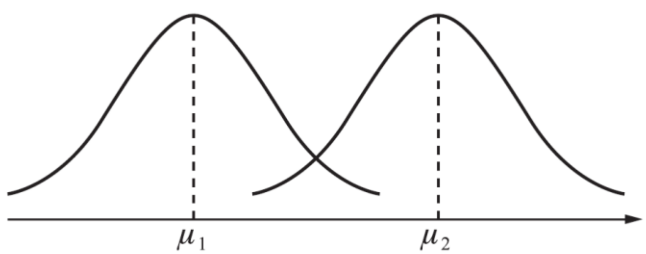


圖 4-7

(4) $\sigma_1 < \sigma_2$，如圖 4-8。

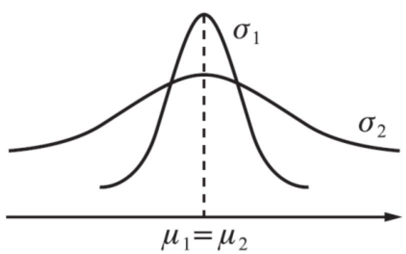


圖 4-8

範例 25

假設 $X \sim N(0, 1)$，請利用附錄五中查表計算下列機率值：

(1)$X \le 2.5$　(2)$-2 \le X \le 3$　(3)$X > 1.5$。

解

(1) $P(X \le 2.5) = \phi(2.5) = 0.9938$。

(2) $P(-2 \le X \le 3) = \phi(3) - \phi(-2) = \phi(3) - [1 - \phi(2)] = \phi(3) + \phi(2) - 1$

$= 0.9987 + 0.9772 - 1 = 0.9759$。

(3) $P(X > 1.5) = 1 - \phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$。

範例 26

設 r.v. $X \sim N(50, 25)$，求 $P(X < 60) = ?$

解

令 $Z = \dfrac{X-50}{5}$，則 $X \sim N(0, 1)$，

$\therefore P(X < 60) = P(\dfrac{X-50}{5} < \dfrac{60-50}{5}) = P(Z < 2) = \phi(2) = 0.9772$。

4-1
4-2

範例 27

假設台灣 5 歲小孩的體重呈現常態分配，其平均值爲 15 公斤，標準差爲 3 公斤，則

(1) 介於 12～18 公斤之 5 歲小孩的比例。

(2) 體重超過 18 公斤的比例。

解

$Z=\dfrac{X-15}{3}\sim N(0,1)$，

(1) $P(12\le X\le 18)=P(\dfrac{12-15}{3}\le\dfrac{X-15}{3}\le\dfrac{18-15}{3})=P(-1\le Z\le 1)=\phi(1)-\phi(-1)$

$=\phi(1)-[1-\phi(1)]=2\phi(1)-1$

$=2\times 0.8413-1=0.6826$。

(2) $P(X>18)=P(\dfrac{X-15}{3}>\dfrac{18-15}{3})=P(Z>1)=1-\phi(1)=1-0.8413=0.1587$。

2. 性質

定理 4.7：設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則

(1) 期望值：$E[X]=\mu$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$。

(4) 數個獨立具常態分配的隨機變數，經由線性組合後仍具常態分配。

(5) 累積分配函數

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt \text{。}$$

(6) $Y=aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$。

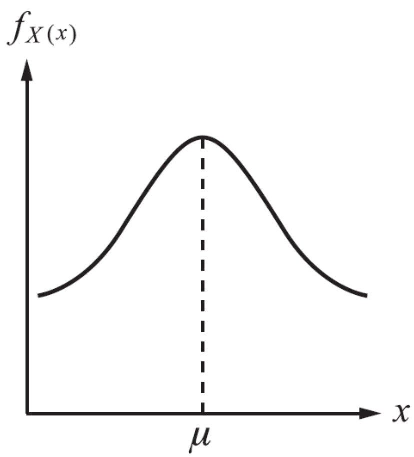


圖 4-9

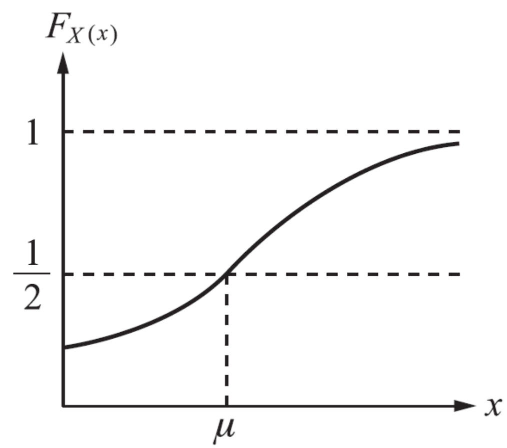


圖 4-10

3. 二項分配與常態分配之關係：

假設 r.v. $X \sim B(n, p)$，當其滿足 $np \geq 5$ 且 $n(1-p) \geq 5$，則二項分配的機率密度函數圖形呈現鐘形曲線，可以用常態分配來近似，又 $E[X] = np$，$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$，所以 $X \sim N(np, np(1-p))$，又因爲二項分配爲離散分配，利用連續分配來近似時需進行修正可得更好的近似結果，因此對任意整數 a，離散分配之二項分配在 $x = a$ 處之機率可用常態分配，$a - 0.5 < x < a + 0.5$ 來近似。

4-1
4-2

範例 28

已知 r.v. $X \sim B(10, 0.5)$，求 $P(X=6)=$？請分別利用二項分配直接求解，與利用常態分配近似求解。

解

(1) $P(X=6)=C_6^{10}(0.5)^6\times(1-0.5)^4=0.2051$。

(2) $E[X]=10\times0.5=5$，$\mathrm{Var}[X]=10\times0.5\times(1-0.5)=2.5$，

則 $P(X=6)=P(5.5\le X\le 6.5)=P(\frac{5.5-5}{\sqrt{2.5}}\le\frac{X-5}{\sqrt{2.5}}\le\frac{6.5-5}{\sqrt{2.5}})=P(0.32\le Z\le 0.95)$

$=\phi(0.95)-\phi(0.32)=0.2034$。

由上面結果可得利用常態分配近似二項分配之效果很好。

範例 29

設 r.v. X 表示隨機檢查 40 件故障率為 40%的產品中的故障數目，則求下列機率：

(1) 有 15 件故障。

(2) 故障數不超過 17 件。

(3) $P(10 \le X \le 15)$。

(4) $P(10 < X < 15)$。

解

由 $np=16\geq 5$，且 $n(1-p)=24\geq 5$，所以可利用常態分配來近似，

令 $Z=\dfrac{X-16}{\sqrt{9.6}}$，則 $Z\sim N(0,1)$，其中 $np=16$，$np(1-p)=9.6$，

(1) $P(X=15)=P(14.5\leq X\leq 15.5)=P(\dfrac{14.5-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{X-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{15.5-16}{\sqrt{9.6}})$

$=P(-0.48\leq Z\leq -0.16)=\phi(-0.16)-\phi(-0.48)$

$=\phi(0.48)-\phi(0.16)=0.1208$。

(2) $P(X\leq 17)=P(X\leq 17.5)=P(\dfrac{X-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{17.5-16}{\sqrt{9.6}})$

$=P(Z\leq 0.48)=\phi(0.48)=0.6844$。

(3) $P(10\leq X\leq 15)=P(9.5\leq X\leq 15.5)=P(\dfrac{9.5-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{X-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{15.5-16}{\sqrt{9.6}})$

$=P(-2.1\leq Z\leq -0.16)=\phi(-0.16)-\phi(-2.1)$

$=\phi(2.1)-\phi(0.16)=0.9821-0.5636=0.4185$。

(4) $P(10<X<15)=P(10.5\leq X\leq 14.5)=P(\dfrac{10.5-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{X-16}{\sqrt{9.6}}\leq\dfrac{14.5-16}{\sqrt{9.6}})$

$=P(-1.78\leq Z\leq -0.48)=\phi(-0.48)-\phi(-1.78)$

$=\phi(1.78)-\phi(0.48)=0.2781$。

4-1
4-2

範例 30

定義函數 $Q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2/2}dt$，

設 X 為高斯隨機變數，均數 m，標準差 σ，

(1) 請將 $P[m-\sigma<X<m+2\sigma]$ 改以 Q 函數表達。

(2) 請證明 $Q(-x)=1-Q(x)$。

解

(1) $P[m-\sigma<X<m+2\sigma]=P\{-1<\dfrac{X-m}{\sigma}<2\}=Q(-1)-Q(2)$。

(2) $Q(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{\infty}e^{-t^2/2}dt$ （令 $u=-t$）

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{-\infty}e^{-u^2/2}(-du)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du-\int_x^{\infty}e^{-u^2/2}du\right]\\
&=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-u^2/2}du\\
&=1-Q(x)
\end{aligned}
$$

。

4-1
4-2

範例 31

常態（高斯）隨機變數 X 的機率密度函數爲 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

(1) 請計算 $P(X\le 5|X>1)$並用 Q 函數表達之，設 Q 函數爲 $Q(x)=\int_x^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz$

(2) 請問隨機變數 $Y=5X^2+10$ 的 $E(Y)$爲何。

(3) 請問隨機變數 $Z=2X+5$ 的機率密度函數 $f_z(z)$爲何。

解

(1) X 爲 $E[X]=0$、$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ 的 Gaussian 分配，且

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\text{令 } z = \frac{x}{\sigma})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q(\frac{a}{\sigma}),$$

故 $P(X \le 5 | X > 1) = \dfrac{P(1 < X \le 5)}{P(X > 1)} = \dfrac{P(X \ge 1) - P(X > 5)}{P(X > 1)} = \dfrac{Q(\frac{1}{\sigma}) - Q(\frac{5}{\sigma})}{Q(\frac{1}{\sigma})}$。

(2) $E[Y] = E(5X^2 + 10) = 5E[X^2] + 10$

$= 5\{\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\} + 10$

$= 5\sigma^2 + 10$。

(3) 因 $z = 2x + 5$，故 $x = \frac{1}{2}(z - 5)$，則

$$f_Z(z) = f(\frac{z-5}{2}) \left| \frac{dx}{dz} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-5)^2}{8\sigma^2}} \frac{1}{2} \quad (-\infty < z < \infty)。$$

4-1
4-2

範例 32

某部隊士兵的身高呈現常態分配，身高均數 170 公分，標準差 10 公分，從部隊中隨機選出 20 名士兵，請問其中至少名身高達到 175 公分的機率是多少？

（註：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0.5} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0.6915$ ）

解

因隨機變數 $X \sim N(170, 10^2)$，故

$$\begin{aligned} P(X \geq 175) &= 1 - P(X < 175) \\ &= 1 - P\left(\frac{X-170}{10} < \frac{175-170}{10}\right) \\ &= 1 - P(Z < 0.5) \\ &= 1 - 0.6915 = 0.3085， \end{aligned}$$

所求的機率$= C_5^{20} P^5 (1-P)^{15}$ 。

4-1
4-2

範例 33

設 X 爲高斯隨機變數，均數爲 30，變異數爲 36；

(1) 請寫出 X 的機率密度函數 $f_X(x)=$？

(2) 另有一個隨機變數 $Y=e^X$，請問 Y 的機率密度函數爲何？

解

(1) 因 $\mu=30$、$\sigma^2=36$，故 $\sigma=6$，則

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-30)^2}{72}}\text{。}$$

(2) 因 $Y=e^X$，且 e^x 爲單調遞增函數，且 $x=\ln y$，故

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\left|\frac{d(\ln y)}{dy}\right|=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-30)^2}{72}}\times\frac{1}{y}\qquad(y\geq 0)\text{。}$$

4-1
4-2

二、均勻分配(Uniform Distribution)

當一個隨機變數在某一區間(α, β)發生的可能性均相同時，其機率分配即為均勻分配，它可以是連續型或離散型，其中擲公正的骰子跟硬幣就是一種離散型的分配，而從實數軸上 0 到 Z 之間隨機任取一數，則呈現連續型均勻分配，其中連續型均勻分配之定義與性質介紹如下：

1. 定義

定義 4.10　若連續型隨機變數 X，其機率密度函數為

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & ,x\in[\alpha,\beta]\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases},$$

且 α、$\beta \in \mathrm{R}$，（$\alpha < \beta$）

則稱 X 具均勻分配，一般表成 $X \sim U(\alpha,\ \beta)$，如圖 4-11。

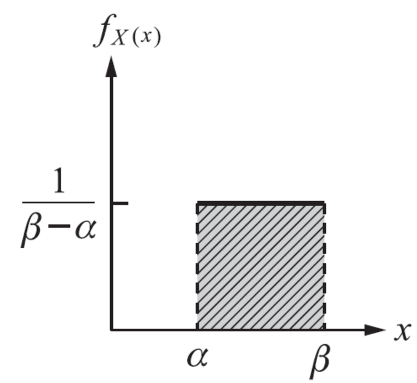


圖 4-11

4-1
4-2

範例 34

設台北市捷運某捷運站在早上七點開始每隔 15 分鐘有一班車到站，且乘客到該捷運站的時間是均勻分配在七點到七點半之間，則

(1) 某乘客五分鐘內等到車子的機率爲何？

(2) 某乘客在該捷運站等車超過十分鐘的機率爲何？

解

(1) 令 r.v. X 表示該乘客爲七點 x 分到該捷運站，$(0 \le x \le 30)$，則 $X \sim U(0, 30)$，

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3} \text{。}$$

(2) $P(0 < X < 15) + P(15 < X < 20)$

$$= \int_{0}^{5} \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dx$$

$$= \frac{1}{3} \text{。}$$

2. 性質

定理 4.8： 設 $X \sim U(\alpha, \beta)$，則

(1) 期望值：$E[X] = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ 。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ 。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = \dfrac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}$ 。

範例 35

求算均勻分配連續隨機變數於區間$[a, b]$內的均數及變異數，設 $a < b$。

解

設 $X \sim U(a, b)$，故 $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$

(1) $E[X] = \int_a^b x \dfrac{1}{b-a} dx = \dfrac{1}{b-a} \dfrac{x^2}{2}\Big|_a^b = \dfrac{b+a}{2}$。

(2) $E[X^2] = \int_a^b x^2 \dfrac{1}{b-a} dx = \dfrac{1}{b-a} \dfrac{x^3}{3}\Big|_a^b = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} - (\dfrac{b+a}{2})^2 = \dfrac{(a-b)^2}{12}$。

範例 36

從$(0, \frac{\pi}{2})$區間隨機選取一數，請問該數 sin 值大於 cos 值的機率是多少？

解

在一區間隨機選取一數的機率，服從均勻分配。故令 $X \sim U(0, \frac{\pi}{2})$，則

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & ,x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

當 $\sin x > \cos x$ 時，可得 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$，故

$$P(\sin X > \cos X) = P(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\, dx = \frac{1}{2}$$ 。

4-1
4-2

範例 37

設 X 是數值區間爲$(0, 1+\theta)$的均勻分配隨機變數，其中參數 $0<\theta<1$；

(1) 請問 X 的（累積）分配函數爲何？

(2) 請問 X^2 的機率密度函數爲何？

解

因 $X \sim U(0, 1+\theta)$，故

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\theta} & ,0<x<1+\theta \\ 0 & ,\text{其他}\end{cases},$$

(1) 因 $F_X(x)=\int_0^x f_X(x)\,dx=\int_0^x \dfrac{1}{1+\theta}\,dx=\dfrac{x}{1+\theta}$ $(0<x<1+\theta)$，

故 $$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,x<0 \\ \dfrac{x}{1+\theta} & ,0<x<1+\theta \\ 1 & ,x>1+\theta\end{cases}。$$

(2) 令 $y=x^2$，故在 $0<x<1+\theta$ 時爲單調函數，且 $x=\sqrt{y}$，則 $Y=X^2$ 的機率密度函數爲

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\left|\frac{d\sqrt{y}}{dy}\right|=\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (0<y<(1+\theta)^2)。$$

範例 38

從(0, 3)區間隨機選取一點爲 X，請問 $X^2 - 5X + 6 > 0$ 的機率是多少？

解

令 $X \sim U(0, 3)$，且當

$X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3) > 0$

可得 $X < 2$ 或 $X > 3$，現在的區間爲(0, 3)，故

$P(X^2 - 5X + 6 > 0) = P(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3}$ 。

三、指數分配（Exponential Distribution）

在前面小節中，我們談到離散型 r.v. X 時，介紹了 Poisson 分配可以用來描述特定時間內某事件發生次數的機率，例如：某家便利商店 1 小時內客人到達人數的機率分配，但如果要進一步研究客人到達的間隔時間，就會用到指數分配，而指數分配是和 Poisson 分配有密切相關，其機率分配可由 Poisson 分配衍化而來，若令 r.v. X 代表兩事件發生的間隔時間，則 $P(X>x)$表示在$(0, x)$時間內沒有任何事件發生的機率，如果在該時間內到達的次數 N 爲到達率 λ 的 Poisson 分配，即 $N \sim Poi(\lambda)$且 $f_N(n) = \dfrac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^n}{n!}$；$n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$，則 $P(X>x) = P(N=0) = \dfrac{e^{-\lambda x} \times (\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$，

$$F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}，$$

所以兩事件之發生間隔時間 X 的機率密度函數爲

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x}；x \ge 0，$$

則有關指數分配的定義與性質介紹如下：

4-1
4-2

1. 定義

定義 4.11：若連續型隨機變數 X，其機率密度函數為

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

則稱 X 具參數 λ 的指數分配。一般表成 $X \sim Exp(\lambda)$，則其機率密度函數與累積分配函數，如圖 4-12、4-13。

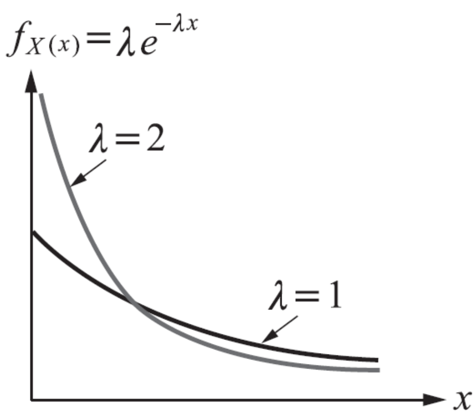


圖 4-12

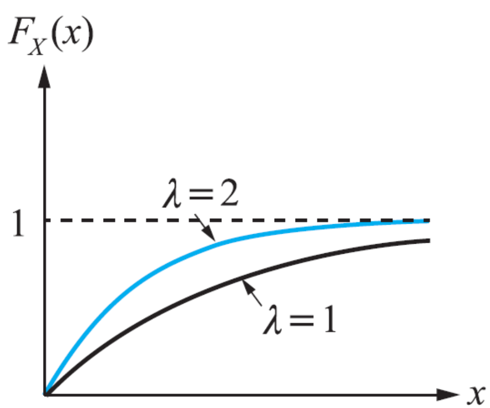


圖 4-13

Note：

(1) 指數分配亦可以用來計算物件的使用壽命，若某物件之單位時間故障率 λ，且一故障便不能用，X 表其使用壽命，則 $X \sim Exp(\lambda)$。

(2) 對於呈 Poisson 分配 $Poi(\lambda)$之隨機變數而言，其在連續二次事件之間隔長度將呈現指數分配 $Exp(\lambda)$。

(3) 指數分配亦可寫成 $X \sim Exp(\beta)$，$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$；$x > 0$，其中 $\beta = \frac{1}{\lambda}$。

4-1
4-2

2. 性質：

定理 4.9：設 X 具參數 λ 的指數隨機變數，則

(1) 期望值：$E[X] = \frac{1}{\lambda}$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$。

(4) 無記憶性。

4-1
4-2

3. 與 Poisson 分配之關係：

Poisson 分配的 r.v. X 表示給定時間內（或指定區域內）所發生的出象數目，而指數分配的 r.v. X 表示連續兩出象發生的間隔時間，指數分配與 Poisson 分配可以互相轉換，例如：若 r.v. $X \sim Poi(20)$，表示在$[0, t]$內到達餐廳的人數，其中 $\lambda = 20$ 表示 1 小時內平均有 20 個人進入該餐廳，即 $\lambda = 20$ 人／小時，若將其轉換爲指數分配 $X \sim Exp(20)$或 $Exp(3)$，則此時的 r.v. X 表示連續兩個客人進入餐廳的間隔時間，其中 $\lambda = 20$ 人／小時或 $\beta = 3$ 分鐘／人。

4-1
4-2

範例 39

假設機場裝滿一卡車行李所需時間 X 呈現指數分配，而其平均裝行李時間為 15 分鐘，則

(1) 求此指數分配的機率密度函數為何？

(2) 裝滿一卡車行李所需時間為 6～18 分鐘的機率？

解

(1) $f_X(x)=\dfrac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}$；$x\geq 0$，$\lambda=\dfrac{1}{15}\rightarrow X\sim Exp(\dfrac{1}{15})$。

(2) $P(6\leq X\leq 18)=\displaystyle\int_6^{18}\frac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}dx=0.3691$。

4-1
4-2

範例 40

假設台中市的公車每 30 分鐘發車一次，某個市民到公車站等待公車的時間爲指數分配，則

(1) 有一位市民到達公車站等待公車時間超過 15 分鐘的機率爲何？

(2) 若該市民到車站等公車等了 15 分鐘，則其再等待超過 15 分鐘的機率爲何？

解

(1) $X \sim Exp(\frac{1}{30})$，$f_X(x) = \frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}$，$x \geq 0$，則

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \int_0^{15} \frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}dx = 0.6065$$ 。

(2) 依據無記憶性，其再等待超過 15 分鐘的機率仍爲 0.6065。

4-1
4-2

範例 41

進行電話總機系統來話輸入流程之模型設計時，設定隨機變數 N 爲波氏分配，並將來話流入速率設爲 λ：

(1) 請問特定觀察時段 t 之內，僅有一通來話的機率爲何？

(2) 請證明，來話間隔時段 T 是屬於指數分配的隨機變數。

解

因 $N(t) \sim Poi(\lambda)$，故 $f_N(n) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = P\{N(t)\}$。

(1) $P\{N(t)=1\} = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!} = \lambda t e^{-\lambda t}$。

(2) 來話間隔時段 T 的 cdf 爲

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{\lambda t}$$

故 T 的 pdf 爲

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \sim Exp(\lambda)。$$

4-1
4-2

範例 42

假設 Geiger 計數器的數目點算結果呈現波氏分配，且平均每分鐘的點計數為 3；

(1) 請問某 20 秒鐘時段內無任何計數的機率為何？

(2) 請問從現在往下第 1 個計數在 10 秒鐘之內出現的機率為何？

(3) 假設到目前為止已經過了 1 分鐘仍無任何新的計數，請問下 1 分鐘內出現新計數的機率為何？

解

設 X 為 20 秒內 Geiger 計數器之計量數目，故 $X \sim Poi(1)$，故

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

(1) $P(X=0) = \dfrac{e^{-1}}{0!} = \dfrac{1}{e}$。

(2) 令隨機變數 T 為直到第一次計數之時間，則 $T \sim Exp(3)$，故 $f_T(t) = 3e^{-3t}$，因此

$$P(T < \frac{1}{6}) = \int_0^{\frac{1}{6}} 3e^{-3t}\, dt = 1 - e^{-\frac{1}{2}}。$$

(3) 令隨機變數 Y 為任一分鐘內質點數目，則 $Y \sim Poi(3)$，故 $f_Y(y) = \dfrac{e^{-3}3^y}{y!}$，因此

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-3}。$$

4-1
4-2

四、Gamma 分配

從前面我們可以知道指數分配處理的物理問題是「某個隨機事件發生一次所需經歷的時間」，而接著我們要討論的是「某 n 個隨機事件都發生，需要經歷多少的時間」，此種問題即爲所謂的 Gamma 分配，基本上來說，Gamma 分配可以看作 n 個獨立的指數分配隨機變數的總和，其詳細介紹如下：

1. 定義

定義 4.12：若連續型隨機變數 X，其機率密度函數爲

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

則稱 X 具 Gamma 分配，一般表成 X～Gamma(α, β)。

其中 $\beta=2$ 時，不同 α 之 Gamma 分配之機率函數，如圖 4-14。

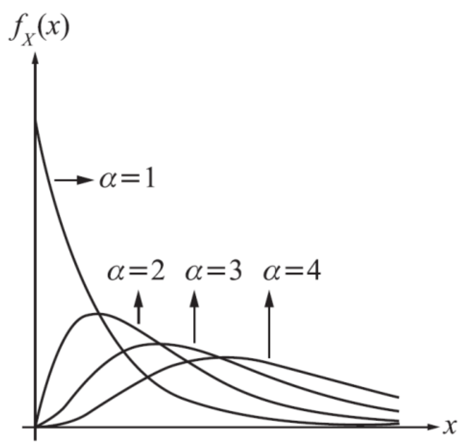


圖 4-14

4-1
4-2

Note：

(1) 系統中某一組件之單位時間故障率爲常數 $\lambda = \dfrac{1}{\beta}$，且該組件 α 重設置，即實際需要的只有一個，其餘均爲備品，當一個故障（失效），另一個會自動接管，因此需要 α 個都失效，系統才會眞的故障，則此系統之可用壽命 X（等待 α 個故障之時間），會呈現 Gamma 分配，則 $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$。

(2) 若 $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$，其中 α 表有幾個指數分配 $Exp(\lambda)$相加，β 表 $Exp(\lambda)$之平均值，即 $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$。

即 $\text{Gamma}\left(\alpha = 1，\beta = \dfrac{1}{\lambda}\right) = Exp(\lambda)$。

舉例來說當我們需要計算，某家店在一個固定時間內會有 n 個顧客上門的機率，並且事先知道該店每小時顧客上門的頻率，即會用到 Gamma 分配。

範例 43

如果一銀行的客服中心發現單位時間間隔內打進來的電話數呈現每分鐘 5 通電話的 Poisson，則該客服中在一分鐘內有兩通電話進來的機率爲何？

解

兩個 Poisson 事件發生爲 Gamma 分配，其中 $\alpha = 2$、$\beta = \dfrac{1}{5}$，令 r.v. X 爲表示兩通電話的間隔時間，則 $X \sim Gamma(2, \dfrac{1}{5})$，

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(2)(\frac{1}{5})^2} x e^{-5x} dx = 25\int_0^1 x e^{-5x} dx = 0.96$$ 。

4-1
4-2

範例 44

假定電話打進某總機的來話數呈現波氏分配，平均每分鐘來話數為 4 通($\lambda = 4$)，請計算 1 分鐘時間之內（設此變數為 X）來話數不到 2 通的機率，即 $P(X \leq 1) =$ ？

解

因 $X \sim \text{Gamma}(2, \frac{1}{4})$，即 $\lambda = 4$ 的指數分配發生 2 次所需時間，則

$$f_X(x) = \frac{xe^{-4x}}{\Gamma(2)(\frac{1}{4})^2} = 16xe^{-4x} \quad (x > 0)，$$

故

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 16xe^{-4x}\,dx = 1 - 5e^{-4}。$$

4-1
4-2

2. 性質

定理 4.10　設 $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$，則

(1) 期望值：$E[X] = \alpha\beta$。

(2) 變異數：$\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2$。

(3) 動差生成函數：$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$。

(4) 可加性：若 $X_1 \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_1, \beta)$、$X_2 \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_2, \beta)$，則

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

(5) 若 $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$，$X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$，則 $X_1 + X_2$ 為 Gamma 分配。

4-1
4-2

範例 45

在核能污染的研究中發現，某動物在核能輻射的污染下，其存活的週數爲 $\alpha = 2$、$\beta = 5$ 的 Gamma 分配，則

(1) 在該研究中，此種動物的平均存活時間是多少？存活時間的標準差？

(2) 動物存活超過 10 週的機率是多少？

解

令 r.v. X 表示存活的週數，則

(1) $E[X] = \alpha\beta = 10$（週）。

$\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\alpha\beta^2} = \sqrt{50} = 7.07$。

(2) $P(X > 10) = \dfrac{1}{\Gamma(2) \times 5^2} \int_{10}^{\infty} x e^{-\frac{x}{5}} dx = 3e^{-2} = 0.406$。

4-1

4-2

3. 卡方分配（Chi-square Distribution）

卡方分配是一種特殊的 Gamma 分配，是機率學與統計學中常用的一種機率分配，其介紹如下：

(1) 定義：在 Gamma 分配中，當 $\alpha = \frac{\gamma}{2}\,(\gamma \in \mathrm{N})$、$\beta = 2$ 時，即隨機變數 X 的機率密度函數爲

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\gamma/2)2^{\gamma/2}} x^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

則稱 X 具 χ^2 分配，一般表成 $X \sim \chi^2(\gamma)$。

4-1
4-2

(2) 性質：設 $X \sim \chi^2(\gamma)$，則

① 期望值：$E[X] = \gamma$。

② 變異數：$\mathrm{Var}(X) = 2\gamma$。

③ 動差生成函數：$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{\gamma}{2}}$，$t < \frac{1}{2}$。

④ r.v. $X \sim N(0, 1)$，則 $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$

⑤ 標準常態分配平方相加 $= \chi^2(n)$

即 r.v. $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(0, 1)$

則 $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$

Note：大樣本下的卡方分配是近似常態分配的，而卡方分配更是統計學中最重要的分配之一，常用來分析母體變異數估計、檢定、近似應用與類別資料分析，詳細情形可以參考一般統計學用書。

4-1
4-2

範例 46

設高斯隨機變數 X_i，$i = 1, 2, \cdots\cdots, M$ 係屬同一類型但相互獨立，均數爲 0，變異數爲 1；請求算：

(1) $Y = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_M$ 的機率密度函數 $f_Y(y)$。

(2) $Z = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ 的機率密度函數 $f_Z(z)$。

解

(1) $X_i \sim N(0, 1)$，$Y \sim N(0, M)$，

故 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi M}} e^{-\frac{y^2}{2M}}$ 。

(2) $Y = Z^2 = X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2(2) = \text{Gamma}(\alpha = 1、\beta = 2) = Exp(\frac{1}{2})$，

故 $f_Y(y) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$，

$(y > 0)$，因此

$f_Z(z) = f_Y(z^2)\left|\dfrac{dz^2}{dz}\right| = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{2}} 2z = z e^{-\frac{z^2}{2}}$，$(z > 0)$。

4-1
4-2

五、Beta 分配

在日常生活中的常見機率模型有常態分配、二項分配與均勻分配等，這些模型的機率分配都是具體知道的，但當有一事件的具體機率分配你是不清楚的，我們就可以利用 Beta 分配來分析它，Beta 分配可以給出所有機率模型出現的可能性大小，即 Beta 分配可以看做是一個機率模型的機率分配，我們可以舉一個例子來說明，就以高速公路的一個收費站或 ETC 感應站爲例，其某個時間內（比如 1 個小時）會經過一些車子（n 台車），若假設經過的車只分爲大車與小車兩類，如果我們希望觀察該收費站在一天 24 小時內大小車輛經過的情形，且小車所佔的比例爲 p，如果每一個小時統計一次，則每個小時內小車的數量會呈現二項分配 $B(n, p)$，但是每小時的 n（經過的車輛數），與 p（小車的比例）均不同，則 24 小時長時間的觀察就會出現 24 種不同的二項分配，所以整個 24 小時的機率分配並不適合設爲一種二項分配，這時候就可以利用 Beta 分配來進行建模，即可設每小時的小車數爲 α，大車數爲 β，則小車的比例爲 $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，而其可用 Beta$(\alpha, \beta)$來建模，即計算每小時觀測到小車的比例可用 Beta 分配來進行建模，即 Beta 分配是你觀察一系列的二項分配，但每一個二項分配的 n、p 都是未知的情況下，成功率 p 的分配，其中 α 與成功事件數相關，β 與失敗事件數相關，以下介紹 Beta 分配的定義、性質與應用。

1. 定義

定義 4.13：若連續型隨機變數 X，其機率密度函數為

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & ,0<x<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

則稱 X 具 Beta 分配，一般表成 $X\sim Beta(\alpha,\beta)$。

4-1
4-2

Note：

(1) $\Gamma(\alpha)$定義為$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}\times t^{\alpha-1}dt$ 。

(2) $\alpha=\beta\rightarrow$則 $f_X(x)$ 對稱 $x=\dfrac{1}{2}$，若 $\beta>\alpha$，則圖形左偏，$\beta<\alpha$，則右偏，如圖 4-15。

如圖 4-15 可知，我們可以透過 α 與 β 的調整來逼近各種機率分配。

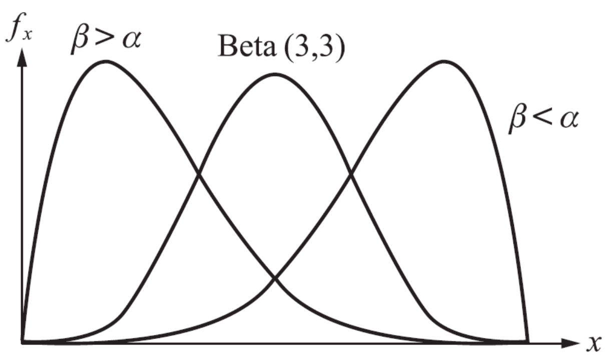


圖 4-15

4-1
4-2

2. 性質

定理 4.11：設 $X \sim Beta(\alpha, \beta)$，則

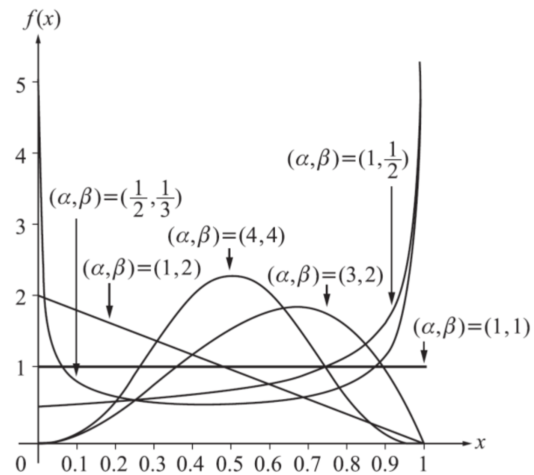
(1) 期望值：$E[X] = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

(2) 變異數：$\text{Var}(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$。

Note：

(1) 當 Beta 分配中，取 $\alpha = \beta = 1$，則 $\beta(1, 1) = U(0, 1)$。

(2) 不同 α、β 之常見 Beta 分配機率密度函數如圖 4-16。



*Beta*分布於*p.d.f*圖形

圖 4-16

範例 47

手機銷售商一週的手機銷售率可用 $\alpha = 4$ 、 $\beta = 2$ 的 Beta 分配來表示，求至少銷售庫存的 90%的機率？

解

由題意可知，銷售率 $X \sim$ Beta (4, 2)，且 $f_X(x)$ 爲

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(6)}{\Gamma(4)\times\Gamma(2)} \times x^3 \times (1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 20x^3(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

則 $P(X \ge 0.9) = \int_{0.9}^{1} 20x^3(1-x)dx$

$$= 20(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5)\Big|_{0.9}^{1}$$

$$= 0.08146$$ 。