iPB 機率學

03 隨機變數

3-1 隨機變數的概念

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

前面章節的古典機率問題是利用計數的觀念做計算，其方便性有限，本單元將引入隨機變數的觀念，此觀念可以將函數映射的概念引入古典機率中，此概念將這個「事件可能性的集合」一對一映射到一個實數軸，就是隨機變數－吃了一個事件之後，隨機變數可以吐出一個機率值。而後隨著此概念的引入，我們將可以用更多的數學方法來求解機率問題。

隨機變數（random variable, R.V 或 r.v.）是一種由樣本空間對應到實數域的函數；例如投擲一公正的骰子出現的點數，我們可以給一個規則，此一種規則即爲一種隨機變數，此時定義域爲樣本空間中的數 $\omega_i = i$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, 6$，即樣本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_6\}$，隨機變數 X 爲一函數，由 $\Omega \to \mathrm{R}$ (實數)，若隨機變數表示出現奇數，則 $X(\omega_1) = X(\omega_3) = X(\omega_5) = 1$，

$X(\omega_2) = X(\omega_4) = X(\omega_6) = 0$，即隨機變數 X 可形成一個映射表如下：

i	1	2	3	4	5	6
$X(\omega_i)$	1	0	1	0	1	0

以下將說明其詳細定義與性質。

定義

1. 隨機變數：

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，且 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為可測的集合，若函數

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

則稱 X 為 Ω 上的隨機變數（random variable），簡寫 r.v. X，且隨機變數為一種函數的對應，如圖 3-1。

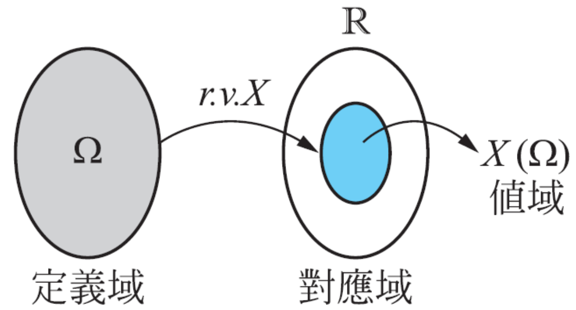


圖 3-1

例如：

投擲一枚公正硬幣兩次，則 Ω = {(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)}，若令 r.v. X 表示出現正面的次數，則 $X(\Omega) = 0, 1, 2$，如圖 3-2，即

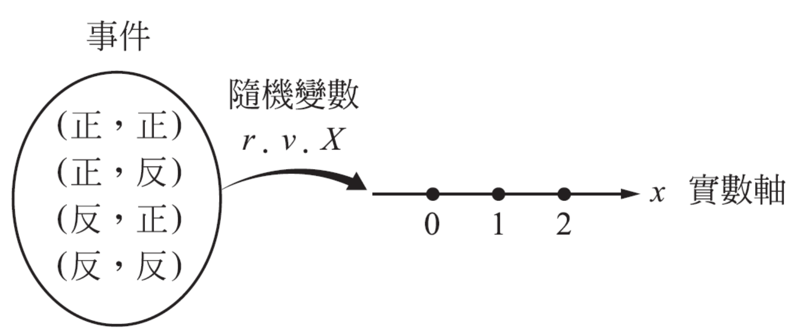


圖 3-2

2. 常見符號：

設 X、Y 爲 Ω 上的隨機變數，且 a、$b\in\mathrm{R}$，習慣上常見的符號其代表的意義如下：

(1) $\{X\le a，Y\le b\}=\{X\le a\}\cap\{Y\le b\}$。

(2) $P(X=a)=P(\{\omega\mid X(\omega)=a，\forall\omega\in\Omega\})$。

(3) $P(X\le a)=P(\{\omega\mid X(\omega)\le a，\forall\omega\in\Omega\})$。

(4) $P(a\le X\le b)=P(\{\omega\mid a\le X(\omega)\le b，\forall\omega\in\Omega\})$。

3. 離散隨機變數：

設 X 爲$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的隨機變數，若 X 的值域 $X(\Omega)$爲**有限或無限可數集合** $\mathscr{A}$（$\mathscr{A}\in\mathrm{R}$），如圖 3-3 且函數

$$f_X(x)=\begin{cases}P(X=x), & x\in\mathscr{A}\\ 0 & ,x\in\mathrm{R}\setminus\mathscr{A}\end{cases}$$

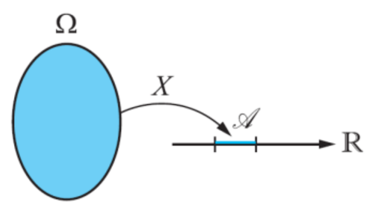


圖 3-3

滿足

(1) $f_X(x)\ge 0$（$\forall x\in\mathrm{R}$）。

(2) $\sum_{x\in\mathscr{A}} f_X(x)=1$。

(3) $P(a\le X\le b)=\sum_{x=a}^{b} f_X(x)$。

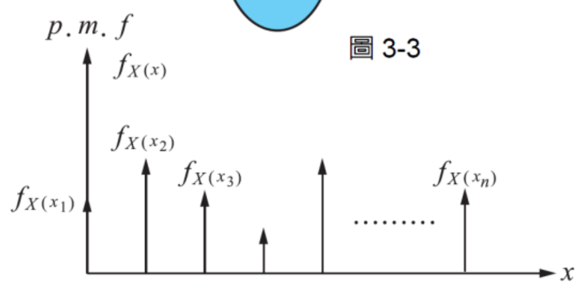


圖 3-4

則稱 X 爲離散型的隨機變數（Discrete random variables）。而函數 $f_X(x)$稱爲 X 之機率質量函數或機率密度函數（probability mass function or probability density function），簡稱爲 p.m.f.或 p.d.f.，如圖 3-4。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

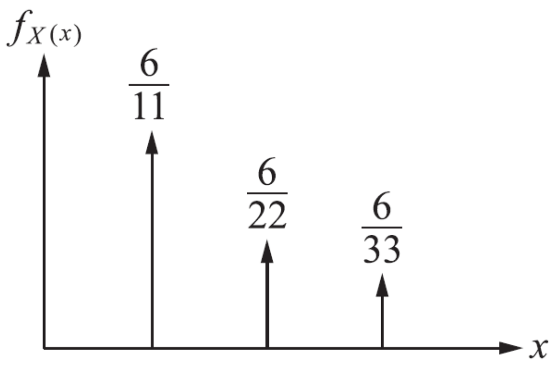
範例 1

隨機變數 X 的機率質量函數為 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x}, & x=1,2,3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求常數 $c=?$

解

如圖所示，

由 $\sum_{x=1}^{3} f_X(x)=1 \Rightarrow \frac{c}{1}+\frac{c}{2}+\frac{c}{3}=1 \Rightarrow c=\frac{6}{11}$。



範例 2

從一副完整 52 張的撲克牌中，連續抽取 3 次，每次抽取 1 張，設隨機變數 X 爲出現紅心（heart）的總數，

(1) 每次抽取的牌放回。

(2) 每次抽取的牌不放回。

求上述兩種情況 X 的機率密度函數。

解

樣本空間爲

$\Omega = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$，

其中 H 爲紅心（heart）而 T 爲其他花色的牌（other）。

(1) 因

$X(TTT) = 0$，

$X(HTT) = X(THT) = X(TTH) = 1$，

$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2$，

$X(HHH) = 3$，

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

即

$X^{-1}(0) = \{TTT\}$，

$X^{-1}(1) = \{HTT, THT, TTH\}$，

$X^{-1}(2) = \{HHT, HTH, THH\}$，

$X^{-1}(3) = \{HHH\}$，

故 X 的值域 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$，且

$$P(0) = P(X=0) = P\{X^{-1}(0)\} = P\{TTT\} = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{27}{64}，$$

$$\begin{aligned}P(1) &= P(X=1) = P\{X^{-1}(1)\} = P\{HTT, THT, TTH\}\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{27}{64}，\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(2) &= P(X=2) = P\{X^{-1}(2)\} = P\{HHT, HTH, THH\}\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{9}{64}，\end{aligned}$$

$$P(3) = P(X=3) = P\{X^{-1}(3)\} = P\{HHH\} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{64}。$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

(2) 抽取的牌不放回時

$$P(0)=P(X=0)=\frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{703}{1700}，P(1)=P(X=1)=\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{2}}{\binom{52}{3}}=\frac{741}{1700}。$$

$$P(2)=P(X=2)=\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{1}}{\binom{52}{3}}=\frac{117}{850}，P(3)=P(X=3)=\frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{11}{850}。$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 3

若 K 為下列機率質量函數的非連續隨機變數：

$$P\{K=k\}=\begin{cases} c\times c_k^4 & ,k=0,1,2,3,4 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

請求算常數 c 之值。

解

因

k	0	1	2	3	4
$P\{K=k\}$	c	$4c$	$6c$	$4c$	c

由 $\sum_{k=0}^{4} P\{K=k\}=16c=1$，故 $c=\dfrac{1}{16}$ 。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 4

有一袋子中裝有編號分別為 1、2、3、4，大小相等均質的 4 顆球，以取後不放回（without replacement）的方式，任意連續取兩顆，

(1) 求樣本空間，及每一個樣本點的機率。

(2) 設隨機變數 X 定義成取出的兩顆球編號的總和，求 X 的樣本空間（值域），及機率密度函數。

(3) 設隨機變數 Y 定義成取出的兩顆球編號最大者的球號，求 Y 的樣本空間（值域），及機率密度函數。

解

(1) 樣本空間為

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

且 $P\{(1, 2)\} = P\{(1, 3)\} = \cdots\cdots = P\{(4, 3)\} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$。

(2) X 值域為

$$X(\Omega)=\{3, 4, 5, 6, 7\}$$

且

$X^{-1}(3)=\{(1, 2), (2, 1)\}$，

$X^{-1}(4)=\{(1, 3), (3, 1)\}$，

$X^{-1}(5)=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$，

$X^{-1}(6)=\{(2, 4), (4, 2)\}$，

$X^{-1}(7)=\{(3, 4), (4, 3)\}$，

故

$P_X(3)=P(X=3)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，

$P_X(4)=P(X=4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，

$P_X(5)=P(X=5)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$，

$P_X(6)=P(X=6)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，

$P_X(7)=P(X=7)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，

則

X	3	4	5	6	7
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(3) Y 值域為 $Y(\Omega)=\{2, 3, 4\}$

且

$Y^{-1}(2)=\{(1, 2), (2, 1)\}$，

$Y^{-1}(3)=\{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$，

$Y^{-1}(4)=\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$，

故

$$P_Y(2)=P(Y=2)=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}，$$

$$P_Y(3)=P(Y=3)=4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}，$$

$$P_Y(4)=P(Y=4)=6\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}，$$

則

Y	2	3	4
P_Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

4. 連續隨機變數：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的隨機變數，若 X 的值域 $X(\Omega)$爲一**無限不可數的集合**，且在 R 中存在一可積函數 $f_X(x)$滿足

(1) $f_X(x) \geq 0$（$\forall x \in \mathbb{R}$）。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$。

(3) $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$（$\forall a, b \in \mathbb{R}$）。

則稱 X 爲連續型的隨機變數（continuous random variable）。而函數 $f_X(x)$稱爲 X 之機率密度函數。

5. 性質：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上連續型的隨機變數，則 $P(X = a) = 0$（$\forall a \in \mathbb{R}$）。

例如：

r.v. X 的 $f_X(x) = \begin{cases} e^{(1-x)} & , x \geq 1 \\ 0 & , x < 1 \end{cases}$,

則 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^{\infty} e^{(1-x)}dx = 1$，如圖 3-5。

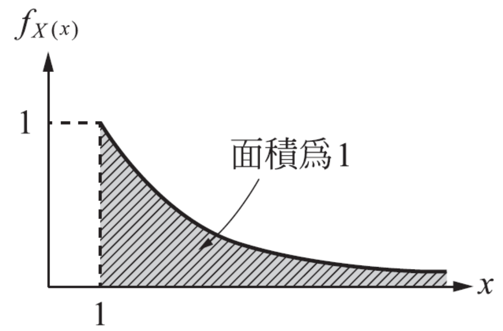


圖 3-5

範例 5

隨機變數 X 的機率密度函數為 $f_X(x)=\begin{cases} cxe^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求常數 c。

解

$\int_0^{\infty} f_X(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^{\infty} c\times x\times e^{-\frac{x}{2}}dx=c(-2xe^{-\frac{1}{2}x}-4e^{-\frac{1}{2}x})\Big|_0^{\infty}=1$，

$\therefore c(0+4)=1 \Rightarrow c=\frac{1}{4}$。

範例 6

隨機變數 X 的機率密度函數為下式：

$$f_X(x)=\begin{cases} cx(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1) 請問 c 之值　(2) 請計算 $P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4})$。

解

(1) 由 $\int_R f_X(x)\,dx=\int_0^1 cx(1-x)\,dx=\frac{c}{6}=1$，可知 $c=6$。

(2) $P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4})=\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{3}{4}} f_X(x)\,dx=\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{3}{4}} 6x(1-x)\,dx=\frac{11}{32}$。

3-2 累積分佈函數(c.d.f)

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

在許多實際問題的應用上，我們常常會計算到隨機變數 X 的機率值必須小於或等於一個值 a，因此我們必須用到隨機變數 X 的累積分佈函數，其相關定義與性質介紹如下。

一、定義

1. 離散型累積分佈函數

設 $f_X(x)$爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的離散型的隨機變數 X 的機率質量函數，則實變函數 F_X：R→[0, 1]，定義成

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{\text{all } x_i \le x} f_X(x_i) = \sum_{\text{all } x_i \le x} P(x_i) u(x - x_i)$$

稱爲 X 的累積分配函數（cumulative distribution function）簡爲 c.d.f.；其中 $u(x - x_i)$ 爲單位步階函數。

例如：擲一個公正硬幣三次，其出現正面的次數定義爲隨機變數 X，如圖 3-6，則 X 的機率質量函數

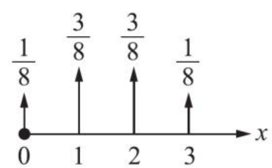


圖 3-6

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

則其累積分佈函數 c.d.f 爲

$$F_X(x)=\frac{1}{8}\times u(x)+\frac{3}{8}\times u(x-1)+\frac{3}{8}\times u(x-2)+\frac{1}{8}\times u(x-3)$$

；其中 $u(x)$爲單位步階函數，如圖 3-7。

NOTE：單位步階函數 $u(x-a)=\begin{cases}1 & ,x\geq a\\ 0 & ,x<a\end{cases}$，如圖 3-8。

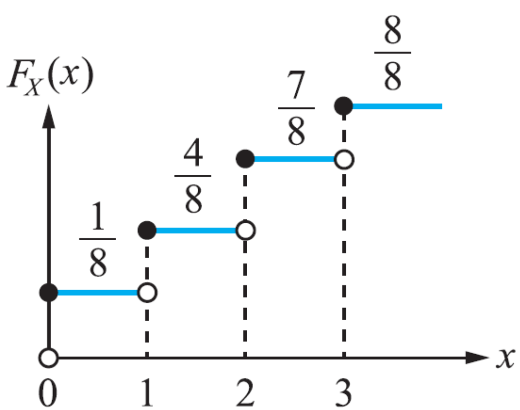


圖 3-7

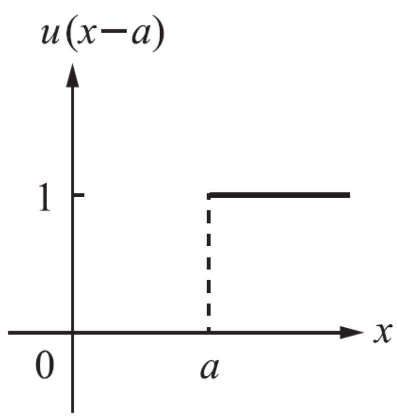


圖 3-8

2. 連續型累積分佈函數

設 $f_X(x)$爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上連續型隨機變數 X 的機率密度函數，則 X 的累積分配函數爲

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

例如：在範例 6 中，其累積分佈函數

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_0^x 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3 \text{，}(0 \le x \le 1)$$

故 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$，如圖 3-10。

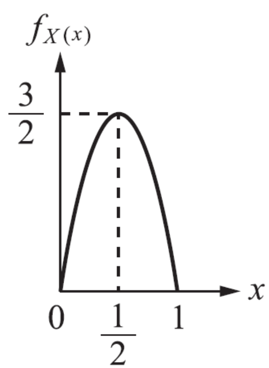


圖 3-9

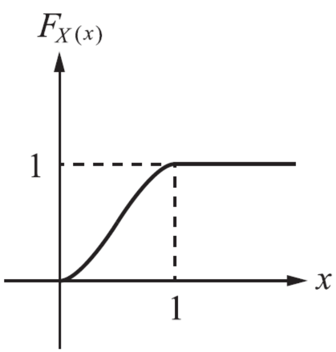


圖 3-10

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

二、性質

1. 定理 1：

設 $F_X(x)$為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的離散型的隨機變數 X 之累積分配函數，則

(1) $F_X(x)$為不減的右連續函數（不一定為左連續函數）。

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)=1$。

(3) 若 $a\in\mathrm{R}$，則 $P(X=a)=F_X(a)-F_X(a^-)$。

(4) 若 a、$b\in\mathrm{R}$ 且 $a<b$，則 $P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$。

(5) 若 $a\in\mathrm{R}$，則 $P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F_X(a)$。

例如：擲一公正硬幣三次，其出現正面次數定義為隨機變數 X，且令

$$A=\{1<X\le 2\}、B=\{0.5\le X<2.5\}、C=\{1\le X<2\}$$

則

$$P(A)=F_X(2)-F_X(1)=\frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{3}{8}，$$

$$P(B)=F_X(2.5)-F_X(0.5)=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}，$$

$$P(C)=F_X(2)-F_X(1^-)-P(X=2)=F_X(2^-)-F_X(1^-)=\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}。$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 7

設隨機變數 X 為投一公正的錢幣三次，所出現的人頭數，求 X 的機率密度函數及累積分佈函數。

解

樣本空間為 $\Omega = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$，

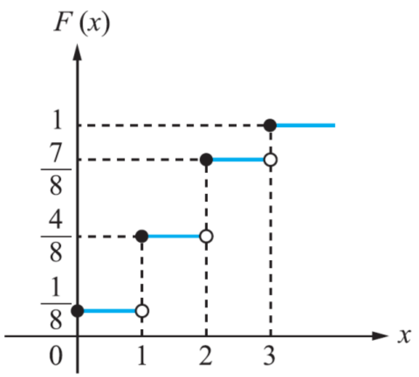
其中 H 為人頭（head）而 T 為背面（tail），則

$X(TTT) = 0$，

$X(HTT) = X(THT) = X(TTH) = 1$，

$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2$，

$X(HHH) = 3$，



即 $X^{-1}(0) = \{TTT\}$，

$X^{-1}(1) = \{HTT, THT, TTH\}$，

$X^{-1}(2) = \{HHT, HTH, THH\}$，

$X^{-1}(3) = \{HHH\}$，

故 X 的值域 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$，且

$$P(0) = P(X = 0) = P\{X^{-1}(0)\} = P\{TTT\} = \frac{1}{8}\text{，}$$

$$P(1) = P(X = 1) = P\{X^{-1}(1)\} = P\{HTT, THT, TTH\} = \frac{3}{8}\text{，}$$

$$P(2) = P(X = 2) = P\{X^{-1}(2)\} = P\{HHT, HTH, THH\} = \frac{3}{8}\text{，}$$

$$P(3) = P(X = 3) = P\{X^{-1}(3)\} = P\{HHH\} = \frac{1}{8}\text{，}$$

則隨機變數 X 的累積分佈函數如圖所示。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 8

隨機變數 X 的累積分配函數爲下式，

$$F_X(x) = \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{650} u(x-n)$$

請計算以下機率：

(1) $P\{-\infty < X \leq 6.5\}$。

(2) $P\{X > 4\}$。

(3) $P\{6 < X \leq 9\}$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

解

(1) $P\{-\infty < X \le 6.5\} = F_X(6.5) = \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{650} u(6.5-n)$

$$= \frac{1^2}{650} + \frac{2^2}{650} + \frac{3^2}{650} + \frac{4^2}{650} + \frac{5^2}{650} + \frac{6^2}{650} = \frac{7}{50}$$ 。

(2) $P\{X > 4\} = 1 - F_X(4)$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{650} u(4-n)$$

$$= 1 - \left(\frac{1^2}{650} + \frac{2^2}{650} + \frac{3^2}{650} + \frac{4^2}{650}\right) = 1 - \frac{3}{65} = \frac{62}{65}$$ 。

(3) $P\{6 < X \le 9\} = F_X(9) - F_X(6)$

$$= \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{650} u(9-n) - \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{650} u(6-n)$$

$$= \frac{7^2}{650} + \frac{8^2}{650} + \frac{9^2}{650} = \frac{97}{325}$$ 。

2. 定理 2：

設 $F_X(x)$爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上連續型隨機變數 X 之累積分配函數，則

(1) $0 \le F_X(x) \le 1$。

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$。

(3) 若 $a \le b$，則 $F_X(a) \le F_X(b)$，即 $F_X(x)$爲非負遞增連續函數。

(4) 若 $P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx$。

(5) 若 $F'_X(x)$ 在 $x \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A} \subseteq \mathrm{R}$)中存在，則 X 的機率密度函數爲

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x), & x \in \mathscr{A} \\ 0, & x \notin \mathscr{A} \end{cases}$$

例如：有一個通訊系統中訊息的傳遞時間爲一隨機變數 X，且 $P[X > x] = e^{-\lambda x}$，$x > 0$ 爲指數分佈型態，則其

$$\text{c.d.f} \quad F_X(x) = 1 - P[x > x] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

且

$$\text{p.d.f} \quad P_X(x) = f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 9

隨機變數 X 的機率密度函數爲下式：

$$f_X(x)=\begin{cases} w(1-x^4)\ , & -1\le x\le 1 \\ 0 & ,\text{他處} \end{cases}$$

(1) 請問 w 之值。

(2) 請問 X 的累積分配函數爲何？

(3) 請計算 $P\{|X|<\frac{1}{3}\}$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

解

(1) 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} w(1-x^4)\,dx = w\left(x-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8w}{5} = 1 \text{，}$$

故 $w = \dfrac{5}{8}$ 。

(2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{5}{8}(1-t^4)\,dt \qquad (-1 \le x \le 1)$

$$= \frac{5}{8}\left(t-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_{-1}^{x}$$

$$= \frac{5}{8}\left(x-\frac{x^5}{5}+\frac{4}{5}\right) \text{，}$$

故 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \dfrac{5}{8}\left(x-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{4}{5}\right) & , -1 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$ 。

(3) $P\{|X| < \frac{1}{3}\} = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{5}{8}(1-x^4)\,dx = \dfrac{101}{243}$ 。

範例 10

隨機變數 X 的累積分配函數爲下式，請計算以下機率：

(1) $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$。(2) $P(2<X\le 4)$。(3) $P(X=1)$。(4) $P(X<3)$。

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ \frac{x}{2} & ,0\le x<1 \\ \frac{2}{3} & ,1\le x<2 \\ \frac{11}{12} & ,2\le x<3 \\ 1 & ,x\ge 3 \end{cases}$$

解

(1) $P\left(X>\frac{1}{2}\right)=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。

(2) $P(2<X<4)=F(4)-F(2)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$。

(3) $P(X=1)=F(1)-F(1^-)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$。

(4) $P(X<3)=F(3^-)=\frac{11}{12}$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 11

設 X 為連續隨機變數，且其累積分配函數 F_X 為下式：

$$F_X(x) = 0.5 + \frac{x}{2(|x|+1)} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(1) 請計算 $P(1 \le |x| \le 2)$。

(2) 請寫出 X 的機率密度函數。

解

(1) $P(1 \le |x| \le 2) = P(-2 \le x \le -1) + P(1 \le x \le 2)$

$$= F(-1) - F(-2) + F(2) - F(1)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{6} \text{。}$$

(2) 因

$$F_X(x) = 0.5 + \frac{x}{2(|x|+1)} = \begin{cases} 0.5 + \dfrac{x}{2(-x+1)} & , -\infty < x < 0 \\ 0.5 + \dfrac{x}{2(x+1)} & , 0 \le x < \infty \end{cases} ,$$

故 X 的機率密度函數 $f_X(x)$ 為

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(-x+1)^2} & , -\infty < x < 0 \\ \dfrac{1}{2(x+1)^2} & , 0 \le x < \infty \end{cases}$$

$$= \frac{1}{(|x|+1)^2} \quad (-\infty < x < \infty) \text{。}$$

3-3　期望值(Expected Value)與變異數(Variance)

期望值可以進一步解釋為「預期值」，以擲一公正的骰子為例，其期望值為 $1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$，表示每次投擲之預期點數為 3.5 點，就其數學式而言，期望值有「平均值（均數）」的意義在，若令隨機變數 X 表示點數，且其機率函數 $f_X(x)=\frac{1}{6}$（$x=1, 2, 3, 4, 5, 6$），則期望值為隨機變數之值與其對應之機率值乘積的和，以下將介紹離散隨機系統與連續隨機系統之期望值。此外，在本節中，也將討論所有資料到平均值（期望值）的平均距離，用以討論資料之變異情形。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

定義

1. 離散隨機變數期望值：

設 $f_X(x)$為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型的隨機變數 X 的機率質量函數，即存在一個有限或無限可數集合$\mathscr{A}$（$\mathscr{A} \in \mathrm{R}$），使得 $\sum_{x \in \mathscr{A}} f_X(x) = 1$，則 X 的期望值（expected value）或平均值（均數）（mean），定義成

$$\mu = E[X] = \sum_{x \in \mathscr{A}} x f_X(x)$$

若 $y = h(x)$爲實值可測的函數，則隨機變數 $Y = h(X)$的期望值爲

$$E[Y] = E[h(X)] = \sum_{x \in \mathscr{A}} h(x) f_X(x)$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 12

連續投擲一顆均勻骰子（出現 1, 2, 3, 4, 5, 6 點的機率各是 $\frac{1}{6}$），直到出現 3 爲止，設 X 爲實際投擲的次數，請問 $E[X]$是多少？

解

由題意可知，擲到 3 時，則成功，故成功的機率爲 $p=\frac{1}{6}$，則 X 的機率密度函數爲

$$f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^{x-1} & , x=1,\ 2, 3, \cdots \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$

故

$$E[X]=\sum_{x=1}^{\infty} xf(x)=\sum_{x=1}^{\infty} x(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^{x-1}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2}=6。$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 13

執行獨立試驗，直到首次出現成功結果為止，設每次試驗的成功機率皆為 p：

(1) 請且出所需試驗次數的機率質量函數。

(2) 請寫出所需試驗次數的期望值。

解

(1) 隨機變數 X 的機率質量函數為

$$f(x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & ,\ x=1,2,3,\cdots \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases}$$ 。

(2) $E[X]=\sum_{x=1}^{\infty} xf(x)=\sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}$

$=p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}$ （因 $\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}=\dfrac{1}{(1-y)^2}$ ）

$=p\dfrac{1}{[1-(1-p)]^2}=\dfrac{1}{p}$ 。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

2. 連續隨機變數期望值：

設 $f_X(x)$為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上連續型隨機變數 X 的機率密度函數，則 X 的期望值（expected value）或平均值（mean），定義成

$$\mu = E[X] = \int_{\mathrm{R}} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

若 $y = h(x)$為實值可測的函數，則隨機變數 $Y = h(X)$的期望值為

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{\mathrm{R}} h(x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, dx$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 14

設隨機變數 X 在 $0 < x < 3$ 時之機率密度函數為 $\dfrac{x}{3}$，求 r.v. X 的期望值。

解

$$E[X] = \int_0^3 x \times \frac{x}{3} dx = \frac{1}{9} x^3 \Big|_0^3 = 3$$ 。

3. 動差（Moment）：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型或連續型的隨機變數，

(1) $m_n = E[X^n]$（$\forall n \in \mathbb{N}$）稱爲 X 的 n 階動差（n-th moment）。

(2) $\mu_n = E[(X - E[X])^n]$（$\forall n \in \mathbb{N}$）稱爲 X 之 n 階中央動差（n-th central moment）。

(3) $E[(X - E[X])^2]$稱爲 X 之變異數（variance），表成 $\mathrm{Var}(X)$或σ_X^2，即

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2]$$

變異數之開方根 σ_X 又稱爲 X 之標準差（standard deviation）。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

Note：

(1) $m_1 = E[X] = \mu$ 為平均數，$m_2 = E[X^2]$稱為均方值。

(2) $\mu_1 = 0$，$\mu_2 = m_2 - \mu^2 = \sigma^2$ 為變異數。

(3) μ_3 表示分佈曲線的偏態量，μ_4 為峰態量，若令 $r_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$，$r_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$，則其相關圖形如下所示：

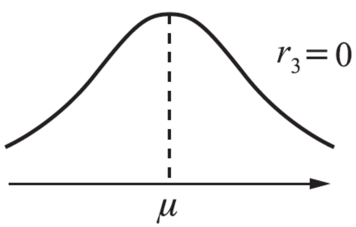


圖 3-11

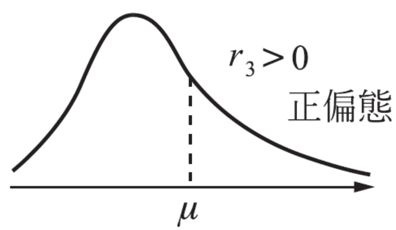


圖 3-12

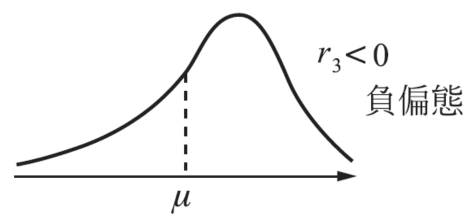


圖 3-13

②

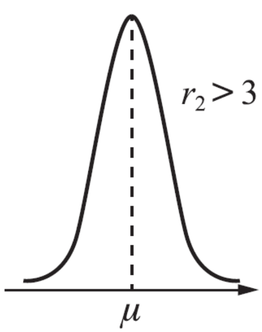


圖 3-14

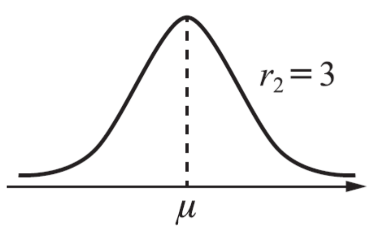


圖 3-15

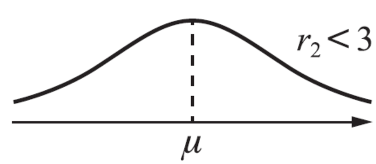


圖 3-16

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 15

隨機變數 X 為擲均勻銅板一枚正面向上的次數，它的可能數值有 $X=0$ 和 $X=1$ 兩種，出現機率分別為 $P(X=0)=\frac{1}{2}$ 和 $P(X=1)=\frac{1}{2}$，請問 X 的平均值和變異數各為何。

解

$$E[X]=\sum_{x=0}^{1} xP\{X=x\}=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}，$$

$$E[X^2]=\sum_{x=0}^{1} x^2P\{X=x\}=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}，$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}。$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 16

連續隨機變數 X 的機率密度函數（p.d.f）$0 < x < 3$ 時爲 $\frac{2x}{9}$，其他情況時 0：

(1) 請計算 X 期望值 $E[X]$。

(2) 請計算 X 變異數 $\mathrm{Var}(X)$。

(3) 請計算機率 $P\{|X-1| \le 1.5\}$爲何。

解

(1) $E[X]=\int_0^3 x\frac{2x}{9}\,dx=\left.\frac{2x^3}{27}\right|_0^3=2$。

(2) $E[X^2]=\int_0^3 x^2\frac{2x}{9}\,dx=\left.\frac{x^4}{18}\right|_0^3=\frac{9}{2}$，

$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$。

(3) $P\{|X-1|\le 1.5\}=P\{-0.5<X<2.5\}$

$=\int_0^{2.5}\frac{2x}{9}\,dx=\left.\frac{x^2}{9}\right|_0^{2.5}=\frac{25}{36}$。

4.　期望值的性質：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型或連續型的隨機變數，a、b、$c \in \mathbb{R}$ 且爲常數，則

$$E[aX^2 + bX + c] = aE[X^2] + bE[X] + c$$

範例 17

隨機變數 X 的可能數值爲-4、-1、2、3、4，每個數值的機率各是$\frac{1}{5}$，請寫出它的：

(1) 機率密度函數。

(2) 平均值。

(3) $Y = 3X^3$ 的隨機變異數。

解

(1) 機率密度函數爲

X	–	-1	2	3	4
P_X	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) $E[X] = (-4)\times\frac{1}{5} + (-1)\times\frac{1}{5} + 2\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{1}{5} + 4\times\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$。

(3) $E[Y] = E[3X^3] = [3(-4)^3 + 3(-1)^3 + 3(2)^3 + 3(3)^3 + 3(4)^3]\times\frac{1}{5} = \frac{102}{5}$，

$E[Y^2] = E[9X^6] = [9(-4)^6 + 9(-1)^6 + 9(2)^6 + 9(3)^6 + 9(4)^6]\times\frac{1}{5} = \frac{80874}{5}$，

故 $\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{80874}{5} - (\frac{102}{5})^2 = \frac{393966}{25}$。

5. 變異數的性質

設 X 為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型或連續型的隨機變數，a、$b \in \mathrm{R}$ 且為常數，則

(1) 若 $X = b$，則 $\mathrm{Var}(X) = 0$。

(2) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$。

(3) 若 $\mathrm{Var}(X) < \infty$，則 $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$。

範例 18

假設 $E[X+4]=10$ 及 $E[(X+4)^2]=116$，請問 X 的標準差是多少？

解

因 $E[X+4]=E[X]+4=10$，

故 $E[X]=10-4=6$，

再由 $E[(X+4)^2]=E[X^2+8X+16]=E[X^2]+8E[X]+16=116$，

故標準差（standard deviation）$\sigma_X=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=4$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 19

某台 1 千歐姆精準電阻器的標準差依規格最多只能是±10 歐姆。這種機器的三個製程階段都會製造偏差，假設第一製程階段的標準差是 5 歐姆，第二階段爲 7 歐姆，現在想要確保機器通過最終規格標準，那麼第三製程階段的標準差最多只能大到何種程度？

解

設隨機變數 X_1、X_2、X_3 爲電阻製程的三個獨立的步驟，則

$\mathrm{Var}(X_1+X_2+X_3)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\mathrm{Var}(X_3)\le(10)^2$，

即 $5^2+7^2+\mathrm{Var}(X_3)\le 100$，

故 $\mathrm{Var}(X_3)\le 26$，因此第三個步驟的標準差不超過 $\sqrt{26}$ 。

3-4　特徵函數與動差生成函數

由前一小節的連續型隨機變數中期望值可以發現，期望值的計算事實上就是一種積分變換。此時我們可以回憶一下在工程數學中，我們最常用到的兩種積分轉換，就是傅立葉轉換（Fourier transform）與拉氏轉換（Laplace transform）。我們可以透過適當選取特徵函數，讓它的期望值可以形成常見的積分轉換，如此便可以到另一個空間去求解機率問題，以下將介紹特徵函數與動差生成函數。

一、定義

1. 離散隨機變數之特徵函數與動差生成函數：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型的隨機變數，則 X 的特徵函數（characteristic function）定義成

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\cos tX] + iE[\sin tX]$$

X 的動差生成函數（moment-generating function）定義成

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x \in \mathrm{R}} e^{tX} f_X(x)$$

Note： (1) $M_X(0) = E[e^{0 \cdot X}] = E[1] = 1$

(2) $M'_X(t)\big|_{t=0} = M'_X(0) = E[X]$

$M''_X(t)\big|_{t=0} = M''_X(0) = E[X^2]$

$M'''_X(t)\big|_{t=0} = M'''_X(0) = E[X^3]$

$\vdots$

2. 連續隨機變數之特徵函數與動差生成函數：

設 $f_X(x)$爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上連續型隨機變數 X 的機率密度函數，則 X 的特徵函數（characteristic function）定義成

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx = \mathscr{F}\{f_X(x)\}$$

其中 $\mathscr{F}\{\cdot\}$爲 Fourier 轉換，$f_X(x)$爲 X 的機率密度函數，故

$$f_X(x) = \mathscr{F}^{-1}\{\phi_X(t)\}$$

X 的動差生成函數（moment-generating function）定義成

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{\mathrm{R}} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

Note： 動差生成函數可以作爲隨機變數的「ID」，若兩個隨機變數 X 與 Y 之動差生成函數 $E(e^{tX})$ 與 $E(e^{tY})$相同，則這個隨機變數必然相同。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

二、性質

1. 特徵函數之基本性質：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型或連續型的隨機變數，a、$b \in \mathrm{R}$ 且爲常數，則

(1) $\phi_X(0) = 1$。

(2) $\phi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$。

(3) $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$。

(4) $\phi_X(-it) = M_X(t)$。

(5) 若 $E[X^n]$存在，則 $\phi_X^{(n)}(0) = i^n E[X^n]$，$\forall n \in \mathbb{N}$，

即可令 $C(t) = \ln \phi_X(t)$，

故 $\mu = E[X] = \frac{1}{i}C'(0)$、$\mathrm{Var}(X) = -C''(0)$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 20

設 X 為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的隨機變數，$\phi_X(t)$為 X 的特徵函數，同時 a、$b \in \mathrm{R}$ 且為常數，則

(1) $\phi_X(0) = 1$。

(2) $\phi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$。

(3) $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$。

解

因 $\phi_X(t) = E[e^{itX}]$，故

(1) $\phi_X(0) = E[e^0] = E[1] = 1$。

(2) $\phi_{aX+b}(t) = E[e^{it(aX+b)}] = E[e^{itaX}e^{ibt}] = e^{ibt}\phi_X(at)$。

(3) $\phi_X(-t) = E[e^{i(-t)X}] = \overline{E[e^{itX}]} = \overline{\phi_X(t)}$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 21

在此定義隨機變數 X 如下：

$$f_X(x) = e^{-2|x|}$$

設隨機變數 Y 與 X 的關係為 $Y = 2X - 3$，

(1) 請利用特徵函數判定 $E[X]$及 $E[X^2]$分別為何。

(2) 請問 $E[Y]$、$E[Y^2]$及 σ_Y^2？

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

解

(1) $\phi_X(t)=E[e^{itX}]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-2|x|}\,dx$

$$=2\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\cos tx\,dx$$

$$=2\frac{2}{2^2+t^2}=\frac{4}{4+t^2}\text{，}$$

因 $\phi'_X(t)=-\dfrac{8t}{(4+t^2)^2}$，故 $E[X]=\dfrac{\phi'_X(0)}{i}=0$，又

$$\phi''_X(t)=-\frac{8(4+t^2)^2-8t\times 2(4+t^2)2t}{(4+t^2)^4}\text{，}$$

故 $E[X^2]=\dfrac{\phi''(0)}{i^2}=\dfrac{1}{2}$。

(2) 因 $Y=2X-3$，故

$E[Y]=2E[X]-3=-3$，

$E[Y^2]=E[(2X-3)^2]=4E[X^2]-12E[X]+9=11$，

故 $\mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2=E[Y^2]-(E[Y])^2=11-9=2$。

2. 動差生成函數之性質：

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型或連續型的隨機變數，a、$b \in \mathbb{R}$ 且爲常數，則

(1) $M_X(0) = 1$。

(2) $M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$。

(3) $M_X(it) = \phi_X(t)$。

(4) 若 $M_X^{(n)}(0)$ 存在，則 $M_x^{(n)}(0) = E[X^n]$，$\forall n \in \mathbb{N}$，

即可令 $D(t) = \ln M_X(t)$，

故 $\mu = E[X] = D'(0)$、$\mathrm{Var}(X) = D''(0)$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 22

設 r.v. X 的動差生成函數爲 $M_X(t)=\frac{2}{5}e^t+\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{3t}$，求 $E[x]$、$\mathrm{Var}[X]$ 與 $f_X(x)$。

解

(1) $E[x]=M_{X'}(0)=2=\mu$、$E[X^2]=M_{X''}(0)=\frac{24}{5}$。

(2) $\mathrm{Var}[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{24}{5}-2^2=\frac{4}{5}$。

(3) $M_X(t)=\sum_{x\in R}e^{tx}f_X(x)$

$$=\frac{2}{5}e^t+\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{3t}，$$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{5}, & x=1,3\\ \frac{1}{5}, & x=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}。$$

範例 23

設 r.v. X 具有動差函數 $E[X^r]=5^r$，$r=1, 2, 3, \cdots\cdots$，求其 $M_X(t)$ 與 $f_X(x)$。

解

(1) $$M_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(tx)^r}{r!}$$
$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{E[X^r]}{r!}\times t^r$$
$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(5t)^r}{r!}=e^{5t}$$ 。

(2) $$f_X(x)=\begin{cases}1 , x=5\\ 0 , 其他\end{cases}$$ 。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 24

隨機變數 X 的動差生成函數為：

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=(\frac{2}{2-t})^2$$

(1) 請問 $E[X]$？　(2) 請問 $Var(X)$？

解

令 $D(t)=\ln M_X(t)=\ln(\frac{2}{2-t})^2=2[\ln 2-\ln(2-t)]$，

故 $D'(t)=\frac{2}{2-t}$，則 $E[X]=D'(0)=1$，又 $D''(t)=\frac{2}{(2-t)^2}$，

故 $\mathrm{Var}(X)=D''(0)=\frac{1}{2}$。

範例 25

不連續隨機變數 X 的動差生成函數 $G(t)$為：

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} P(X_j)$$

(1) 設 $P(x) = \dfrac{a^x}{x!} e^{-a}$，$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots$，請問動差生成函數 $G(t)$的波氏分配爲何？

(2) 請利用動差生成函數 $G(t)$求算波氏分配的平均值（μ）和變異數（σ^2）。

解

(1) $G(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \dfrac{a^x e^{-a}}{x!} = M_X(t)$

$$= e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ae^t)^x}{x!} = e^{-a} \exp\{ae^t\} = e^{-a+ae^t}$$

$$= \exp\{-a(1-e^t)\}$$ 。

(2) 令 $D(t) = \ln G(t) = -a(1-e^t)$，故

$\mu = E[X] = D'(0) = a$，$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = D''(0) = a$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 26

設隨機變數 X 的機率密度函數如下：

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , x\geq 0\\ 0 & , x<0\end{cases}$$

令 $\lambda>0$。

(1) 請證明隨機變數 X 的動差生成函數爲

$$M_x(t)=E[e^{tX}]=\frac{\lambda}{\lambda-t}\quad ，t<\lambda$$

(2) 設隨機變數 $Y=X_1+2X_2+3X_3$，其中 X_1、X_2、X_3 爲獨立隨機變數，但三者的機率密度函數 $f_X(x)$均相同，請問 $E[Y]$及 $E[Y]^2$？

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

解

(1) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda - t}e^{-(\lambda - t)x}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda)\text{。}$$

(2) 因 $E[X] = M'_X(0) = \frac{1}{\lambda}$，$E[X^2] = M''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$，

故 $E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \frac{1}{\lambda}$，則

$$E[Y] = E[X_1 + 2X_2 + 3X_3] = E[X_1] + 2E[X_2] + 3E[X_3]$$
$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} = \frac{6}{\lambda}\text{。}$$

$$E[Y^2] = E[(X_1 + 2X_2 + 3X_3)^2]$$
$$= E[X_1^2 + 4X_2^2 + 9X_3^2 + 4X_1X_2 + 12X_2X_3 + 6X_1X_3]$$
$$= E[X_1^2] + 4E[X_2^2] + 9E[X_3^2] + 4E[X_1]E[X_2] + 12E[X_2]E[X_3] + 6E[X_1]E[X_3]$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} + 4\times\frac{2}{\lambda^2} + 9\times\frac{2}{\lambda^2} + 4\times\frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda} + 12\times\frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda} + 6\times\frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda}$$
$$= \frac{50}{\lambda^2}\text{。}$$

3-5　隨機變數的函數變換

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

我們在前面已經充分介紹了單一變數之隨機變數的機率性質，但若存在兩隨機變數 X 與 Y，但 Y 爲 X 的函數，則計算隨機變數 Y 之性質時，可以透過 X 來獲得。其做法即爲隨機變數的函數變換，介紹如下。

1. 離散型隨機變數的函數變換

設 X 爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上離散型的隨機變數，而 $y = h(x)$爲實值可測的函數，則 X 的函數 $Y = h(X)$，亦爲$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的隨機變數。若 X 的機率分佈爲

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

且 $y_i = h(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$均爲相異時，則 $Y = h(X)$的機率的分佈爲

$$P(Y = y_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

若 $y_i = h(x_i)$中有相同值時，應將有關的 p_i 合併。例如

$$y_k = h(x_{k_1}) = h(x_{k_2}) = \cdots\cdots = h(x_{k_j})$$

則

$$P(Y = y_k) = p_{k_1} + p_{k_2} + \cdots\cdots + p_{k_j}$$

範例 27

設隨機變數 X 的機率分佈為

X	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f_X	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$

求下列隨機變數的機率分佈

(1) $Y=|X|$。

(2) $Z=\cos(X+\frac{\pi}{4})$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

解

(1) Y 只有 0、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{2}$ 等三種值且

$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{2}{5},$$

$$P(Y=\frac{\pi}{4})=P(X=-\frac{\pi}{4})+P(X=\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(Y=\frac{\pi}{2})=P(X=-\frac{\pi}{2})+P(X=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10},$$

故 Y 的機率分佈爲

Y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f_Y	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

(2) Z 有 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$、0、$\frac{1}{\sqrt{2}}$、1 等值，且

$$P(Z=-\frac{1}{\sqrt{2}})=P(X=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{20}，$$

$$P(Z=0)=P(X=\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}，$$

$$P(Z=\frac{1}{\sqrt{2}})=P(X=-\frac{\pi}{2})+P(X=0)=\frac{1}{20}+\frac{2}{5}=\frac{9}{20}，$$

$$P(Z=1)=P(X=-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}，$$

故 Z 的機率分佈爲

Z	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
f_Z	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{4}$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 28

設隨機變數 X 的機率分佈爲

X	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
f_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

求 $Y=\cos(\pi X)$的機率分佈及分配函數。

解

Y 只有–1、1 兩種值，且

$$P(Y=-1)=P(X=1)+P(X=3)+\cdots\cdots+P(X=2n-1)+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{2}{3}\text{，}$$

$$P(Y=1)=P(X=2)+P(X=4)+\cdots\cdots+P(X=2n)+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}\text{，}$$

故 Y 的機率分佈為

Y	-1	1
f_Y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y 的分配函數為

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le -1\\ \frac{2}{3} & -1<y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}\text{。}$$

範例 29

令隨機變數 X 的機率分配爲 $f_X(x)=\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{x-1}$；$x=1, 2, 3,\cdots$（爲幾何分配），若令一隨機變數 $Y=X^2$，求 Y 的機率分配。

解

$Y=X^2=1, 4, 9, \cdots\cdots$，$X=\sqrt{Y}=1, 2, 3, \cdots$且 X 與 Y 爲一對一均相異，

所以 $f_Y(y)=P_Y(y)=f_X(x=\sqrt{y})=\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\sqrt{y}-1}$；$y=1, 4, 9, \cdots\cdots$。

2. 連續型隨機變數的函數變換

設 X 為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上連續型隨機變數，而 $y = h(x)$為實值可測的函數，則 X 的函數 $Y = h(X)$，亦為$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的隨機變數。若 X 的機率密度函數為 $f_X(x)$，累積分配函數為 $F_X(x)$，則 $Y = h(X)$的累積分配函數為

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(h(X) \le y) = P(X \in D) = \int_D f_X(x)\,dx$$

其中 $D = \{x \mid h(x) \le y，\forall x \in \mathbb{R}\}$。

(1) 設 $h(x)$為嚴格單調，如圖 3-17，且反函數 $h^{-1}(y)$為連續可微，若

$c = \min\ \{x \mid f_X(x) > 0，x \in \mathbb{R}\}$、

$d = \max\ \{x \mid f_X(x) > 0，x \in \mathbb{R}\}$

則 $Y = h(X)$的機率密度函數為

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \times |\{h^{-1}(y)\}'|, & a < y < b \\ 0 & ,其他 \end{cases}$$

其中 $a = \min\{h(c), h(d)\}$、$b = \max\{h(c), h(d)\}$，同時

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(h^{-1}(y)) & ，h'(x) > 0 \\ 1 - F_X(h^{-1}(y)), & h'(x) < 0 \end{cases}。$$

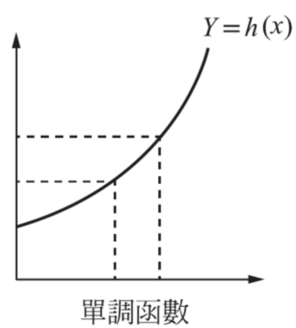


圖 3-17

NOTE：若 $h^{-1}(y)$無定義時，則 $f_Y(y)=0$。

例如：

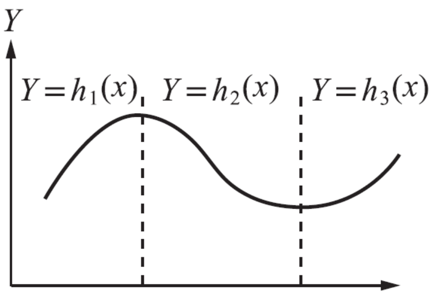
r.v. X 的機率密度函數 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ;x\ge 0,\ \lambda>0\\ 0 & ;\text{其他}\end{cases}$

若 r.v. $Y=\sqrt[3]{x^2}$，則 Y 為單調函數 $\rightarrow x=y^{\frac{3}{2}}$；$y\ge 0$，

$$\therefore f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=f_X(y^{\frac{3}{2}})\times\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}=\lambda e^{-\lambda y^{\frac{3}{2}}}\times\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}},$$

其中 $y\ge 0$。

(2) 設 $h_i(x)$在不重疊的區間 $I_1, I_2,\cdots$上為嚴格單調，如圖 3-18，且 $h_i(x)$對應的反函數 $h_i^{-1}(y)$（$i=1, 2,\cdots\cdots$）為連續可微，則 $Y=h(X)$的機率密度函數為



非單調函數

圖 3-18

$$f_Y(y)=\sum_i f_X(h_i^{-1}(y))\times\left|\{h_i^{-1}(y)\}'\right|$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 30

有一連續隨機變數 X 的機率密度函數爲 $f_X(x)=\dfrac{1}{24}x$，$1<x<7$，求另一隨機變數 $Y=2X-1$ 的機率分佈。

解

$y=2x-1$，則 $x=\dfrac{y+1}{2}$，且 y 爲 x 的單調函數，

$y=h(x)=2x-1$，$h^{-1}(y)\ =x=\dfrac{y+1}{2}$，$[h^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{2}$，

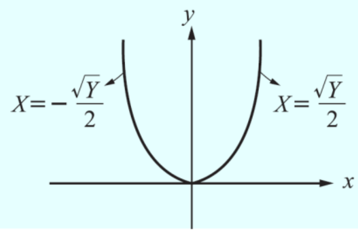
$\therefore f_Y(y)=f_X(x=\dfrac{y+1}{2})\times|\dfrac{dx}{dy}|=\dfrac{1}{24}\times\dfrac{y+1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{96}(y+1)$；$1<y<13$。

範例 31

r.v. X 的機率密度函數爲 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$；$-\infty<x<\infty$，

若 r.v. $Y=4X^2$，

求 Y 的機率密度函數。



解

$X=\pm\dfrac{\sqrt{Y}}{2}$，$x_1=\dfrac{\sqrt{y}}{2}$、$x_2=-\dfrac{\sqrt{y}}{2}$，

則 $f_Y(y)=f_X(\dfrac{\sqrt{y}}{2})\left|\dfrac{dx_1}{dy}\right|+f_Y(-\dfrac{\sqrt{y}}{2})\left|\dfrac{dx_2}{dy}\right|$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{8\sigma^2}}\times\frac{1}{4\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{8\sigma^2}}\times\frac{1}{4\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{8\sigma^2}}\text{；}y\geq 0\text{。}$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 32

設 X 爲連續型的隨機變數，且其密度函數爲

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

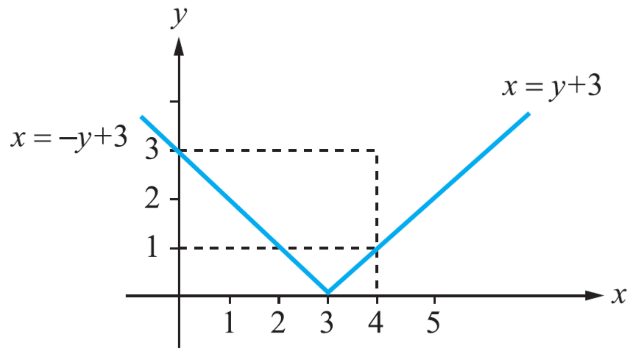
求(1) $Y=|X-3|$。

(2) $Z=|X-2|$的累積分配函數及機率密度函數。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

解

(1) 在 $0 \le x \le 4$ 時，$0 \le y \le 3$，如圖所示。



(a) $0 \le y \le 1$，$F_Y(y) = P(Y < y) = \int_{-y+3}^{y+3} f_X(x)\,dx = \int_{-y+3}^{y+3} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-y+3}^{y+3} = \frac{y}{2}$；

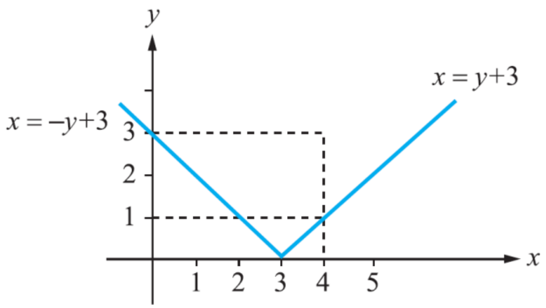
(b) $1 \le y \le 3$，$F_Y(y) = P(Y < y)$

$$= \int_{-y+3}^{4} f_X(x)\,dx = \int_{-y+3}^{4} \frac{1}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x\Big|_{-y+3}^{4} = \frac{y+1}{4}$$；

解

(1) 在 $0 \le x \le 4$ 時，$0 \le y \le 3$，如圖所示。



(a) $0 \le y \le 1$，$F_Y(y) = P(Y < y) = \int_{-y+3}^{y+3} f_X(x)\,dx = \int_{-y+3}^{y+3} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-y+3}^{y+3} = \frac{y}{2}$；

(b) $1 \le y \le 3$，$F_Y(y) = P(Y < y)$

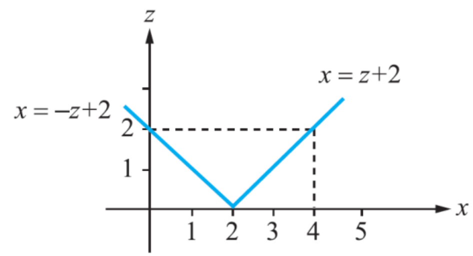
$$= \int_{-y+3}^{4} f_X(x)\,dx = \int_{-y+3}^{4} \frac{1}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x\Big|_{-y+3}^{4} = \frac{y+1}{4}；$$

密度函數爲

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < y \le 1 \\ \frac{1}{4} & 1 < y \le 3 \\ 0 & y > 3 \end{cases}。$$

(2) 在 $0 \le x \le 4$ 時，$0 \le z \le 2$，如圖所示。



$$F_Z(z) = P(Z < z) = \int_{-z+2}^{z+2} f_X(x)\,dx = \int_{-z+2}^{z+2} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-z+2}^{z+2} = \frac{z}{2}\text{，}$$

故分配函數為

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & ,z \le 0 \\ \dfrac{z}{2} & ,0 < z \le 2 \\ 1 & ,z > 2 \end{cases}$$

密度函數為

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & ,z \le 0 \\ \dfrac{1}{2} & ,0 < z \le 2 \\ 0 & ,z > 2 \end{cases}\text{。}$$

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 33

X 為隨機變數，設 Y 為與隨機變數 X 之乘方成比例互動的另一隨機變數，例如 $y=g(x)=x^2$（若 $x\geq 0$）或 0（所有其他情況）；若隨機變數 X 之機率密度函數為 $f_X(x)$，那麼請問隨機變數 Y 的機率密度函數 $f_Y(y)$。

解

因 $y=g(x)=\begin{cases} x^2 &, x\geq 0 \\ 0 &, \text{其他} \end{cases}$，

故 $x=g^{-1}(y)=\begin{cases} \sqrt{y} &, y\geq 0 \\ 0 &, \text{其他} \end{cases}$，

則 $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\times\left|\dfrac{dx}{dy}\right|=\begin{cases} f_X(\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}} &, y\geq 0 \\ 0 &, \text{其他} \end{cases}$。

3-1
3-2
3-3
3-4
3-5

範例 34

設 X 為連續型的隨機變數，且其分配函數為 $F_X(x)$，求 $Y=2X-1$ 的分配函數。

解

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(2X-1<y)=P(X<\frac{y+1}{2})=F_X(\frac{y+1}{2})$$ 。