iPB 機率學

02 機率空間

2-1
2-2
2-3

關於機率的由來，一般的文獻都是以默勒（Chevalier de Mere, 1607～1684），請教巴斯卡（Blaise Pascal, 1623～1662）有關擲骰子的機率問題談起，接著巴斯卡則寫信請教費瑪（Piere de Fermat, 1601～1665），而費瑪則於 1654 年 7 月 27 日回信予以回覆。由於巴斯卡與費瑪鍥而不捨的來回討論，使機率的理論有了完整的建立。而後拉普拉斯（Pierre de Laplace, 1749～1827）則加廣且加深機率的數學理論，不只在擲骰子或賭博問題而已，甚至用到天文學，此外他更利用在法國的人口抽樣調查中，使得機率論在數學上佔有一席之地。

2-1 概論(Concepts)

數學家使用試驗來描述產生一組數據資料的任意程序，其中最簡單的試驗就是擲硬幣，在這個試驗中只會產生正面（H）或反面（T），以下將介紹機率中常見的定義與性質。

一、定義：

1. 隨機試驗：

若有一試驗，滿足下列二個特性時，我們就稱其爲隨機試驗（random experiment）。

(1) 試驗可在相同的條件下重複進行多次。

(2) 可預知每次試驗所有可能的結果（outcome），且每次試驗的結果僅有其中一種結果。

2. 樣本空間：

隨機試驗中所有可能的結果所構成的集合稱爲樣本空間（sample space），一般以 Ω 來表示，樣本空間中的每一個元素稱爲基本事件（event）或樣本點（sample point）。

例如：擲一公正的骰子，其點數所形成的樣本空間 Ω。

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

若 A 集合表示出現偶數點的事件，則 $A = \{2, 4, 6\}$。

2-1
2-2
2-3

古典機率學一直沒有非常完整的公理化定義，整個機率論的公理化醞釀了約 30 年，從1900 年到1933 年，正值現代數學公理化思潮的高峰期。在1900 年，數學家 David Hilbert 在數學年會上問了石破天驚的提出 23 個問題。這 23 個問題中，其中第六個問題就跟「隨機」有關，其希望用數學的角度「給出物理跟機率的公理。」，此問題在1933 年由俄國偉大數學家 Andrey Nikolaevich Kolmogorov（1903～1987 年）完成機率論的公理化，其包含機率測度與機率空間，此概念普遍被數學家所接受，在這些簡單的假設下，開啓了機率論的豐富發展，其介紹如下：

3. 機率測度：

機率測度 $P[\cdot]$是一個函數，其將樣本空間 Ω 中的事件集合 $\mathscr{F}$ 映射到實數[0, 1]，定義為

$$P : \mathscr{F} \rightarrow [0, 1]$$

且滿足下面公理（axioms）

(1) $P(\Omega) = 1$。

(2) $\forall A \in \mathscr{F}$，則 $P(A) \geq 0$。

(3) 若$\forall A_i \in \mathscr{F}$（$i \in \mathrm{N}$）為互斥集合，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots\cdots$$

4. 機率空間：

由非空的集合 Ω（樣本空間）和 Ω 上的事件集合 $\mathscr{F}$，以及定義於 $\mathscr{F}$ 中之機率測度 P 所組成的空間，稱爲機率空間（probability space），一般表示成$(\Omega, \mathscr{F}, P)$。

範例 1

已知出生嬰兒爲男孩的機率爲 0.51，試定義嬰兒性別爲結果之機率空間。

解

$\Omega = \{M, W\}$，其中 M 表男孩，W 表女孩，故

$\mathscr{F} = \{\varnothing, \{M\}, \{W\}, \{M, W\}\}$

且 $P(M) = 0.51$，$P(W) = 0.49$，$P(M + W) = 1$，$P(\varnothing) = 0$。

範例 2

某個隨機實驗的樣本空間 $S=\{a,b,c\}$，假設 $P[\{a,c\}]=\frac{2}{3}$ 且 $P[\{b,c\}]=\frac{1}{2}$，請利用機率定理求算基本事件的出現機率。

2-1
2-2
2-3

解

由機率測度可知，

$P[\{a\}]+P[\{b\}]+P[\{c\}]=1$，

令 $P[\{a\}]=x$、$P[\{b\}]=y$、$P[\{c\}]=1-x-y$，又

$$\begin{cases} P[\{a,c\}]=P[\{a\}]+P[\{c\}]=x+(1-x-y)=\dfrac{2}{3} \\ P[\{b,c\}]=P[\{b\}]+P[\{c\}]=y+(1-x-y)=\dfrac{1}{2} \end{cases},$$

可解得 $x=\frac{1}{2}$、$y=\frac{1}{3}$，故

$P[\{a\}]=\frac{1}{2}$、$P[\{b\}]=\frac{1}{3}$、$P[\{c\}]=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$。

2-1
2-2
2-3

5. 常見的機率事件：

設有一機率空間$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，則$\mathscr{F}$中的元素稱為事件（Event）。常見的機率事件有

(1) 確定事件（certain or sure event），一定發生的事件。

(2) 不可能發生事件（impossible or null event），如$\varnothing$。

(3) 和事件（sum event）：事件 A 發生或事件 B 發生的事件，以$(A \cup B)$表示。

(4) 積事件（product event）：事件 A 發生且事件 B 發生的事件，以$(A \cap B)$或 AB 表示。

(5) 餘事件（complement event）：事件 A 不發生的事件，以 A^c 或 A'來表示。

(6) 互斥事件（mutually exclusive events or disjoint event）：不能同時發生的兩事件 A、B，即$(A \cap B) = \varnothing$，稱為互斥事件，換句話說，即事件 A 發生時，事件 B 必不發生，反之亦然。

2-1
2-2
2-3

6. 有限機率空間中機率的定義：

(1) 有限等機率空間（finite equiprobable spaces）：

設隨機試驗的樣本空間 Ω 有 n 個元素，且每一元素出現之機率相等，若 A 為 Ω 中的一隨機事件（即 A 為 Ω 的一子集），則事件 A 發生之機率為

$$P(A)=\frac{A\text{中元素的個數}}{\Omega\text{中元素的個數}}=\frac{\#A}{\#\Omega}$$

其中#Ω、#A 為 Ω、A 中元素的個數。或

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{發生的方法}}{\text{樣本空間}\Omega\text{發生的方法}}$$

2-1
2-2
2-3

(2) 有限機率空間（finite probability spaces）：

設隨機試驗的樣本空間為

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n\}$$

且 ω_i 發生之機率為 p_i（$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$），其中

$$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$$

則隨機事件

$$A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \cdots\cdots, \omega_{k_m}\}\ (m \leq n)$$

發生之機率為

$$P(A) = p_{k_1} + p_{k_2} + \cdots\cdots + p_{k_m}$$

範例 3

這裡有顆形狀特殊但質量均勻的骰子，上面只有 1、3 和 5 三個數字；設二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 的係數需根據滾骰子所出現的數字來決定，並以第一次出現的數字爲 b，第二次出現的數字爲 c：

(1) 請寫出靠擲骰子所決定方程式的樣本空間。

(2) 以二次方程式有實數根做爲事件，請表達此等事件的樣本空間。

(3) 求算實數根方程式的出現機率。

解

(1) 樣本空間爲

$\Omega = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$。

(2) 二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$，要有實根必須 $b^2 - 4c \geq 0$，故滿足的事件有

$A = \{(3, 1), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$。

(3) $P(A) = \dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \dfrac{4}{9}$。

範例 4

投擲兩顆骰子

(1) 請寫出投擲這兩顆骰子的所有可能結果及其樣本空間。

(2) 請寫出兩顆骰子所出現點數均相同的結果，及每種結果的出現機率。

解

(1) $S=\{(x, y) \mid x, y=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

(2) $A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$，故 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$。

2-1
2-2
2-3

7. 無限不可數機率空間中的機率定義

設 Ω 爲無限不可數樣本空間，且 Ω 中每一樣本點出現之機率相等，若 A 爲 Ω 中的一隨機事件（即 A 爲 Ω 的一子集），則事件 A 發生之機率爲

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

其中 $m(\Omega)$、$m(A)$表示 Ω、A 的幾何量度（如長度、面積或體積）。

2-1
2-2
2-3

範例 5

已知係數 b、c 互爲獨立，且等機率分佈於$[0, 1]$，求 $x^2+2bx+c=0$ 有實根的機率。

解

$\Omega=\{(b,c)\mid 0\le b\le 1，0\le c\le 1\}$，則 $m(\Omega)=1$

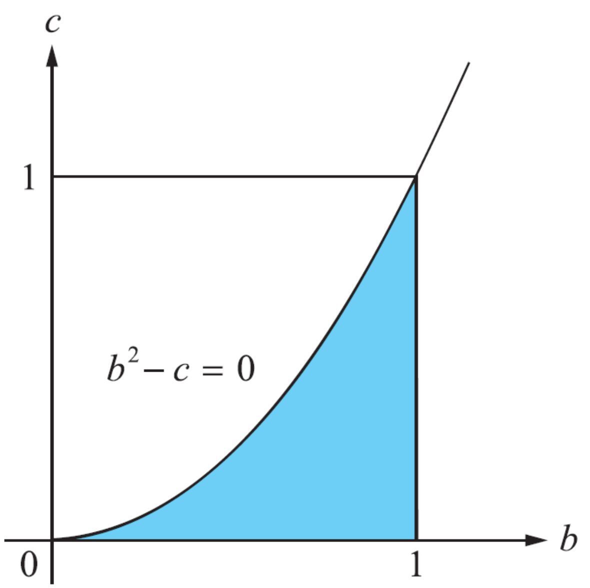
且 $A=\{(b,c)\mid b^2-c\ge 0\}$，故

$$m(A)=\int_0^1\int_0^{b^2} dc\times db=\frac{1}{3}。$$

此機率即爲圖中有顏色部分

面積與樣本空間之面積比

即 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{1}{3}$。



二、性質

1. 定理 1：

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若 A、$B \in \mathscr{F}$，則

(1) $P(\varnothing) = 0$。

(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$。

(3) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$，如圖 2-1。

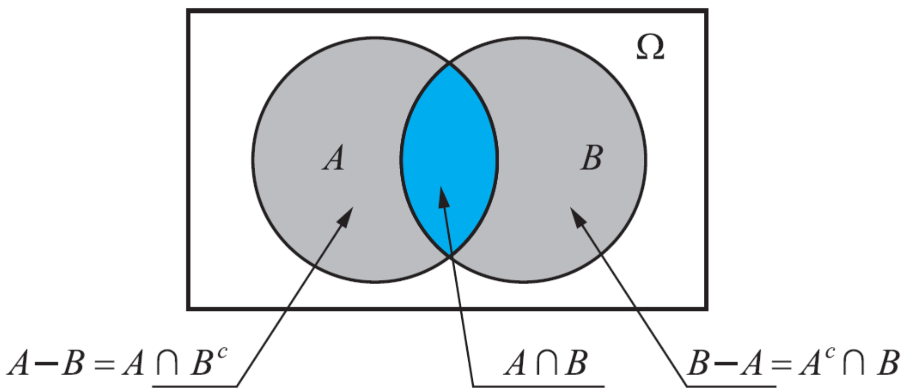


圖 2-1

2-1
2-2
2-3

範例 6

某火車與某路公車將在 9：00～10：00 之間以等機率方式隨機到達車站，並停留十分鐘，則火車與公車相遇的機率為何？

解

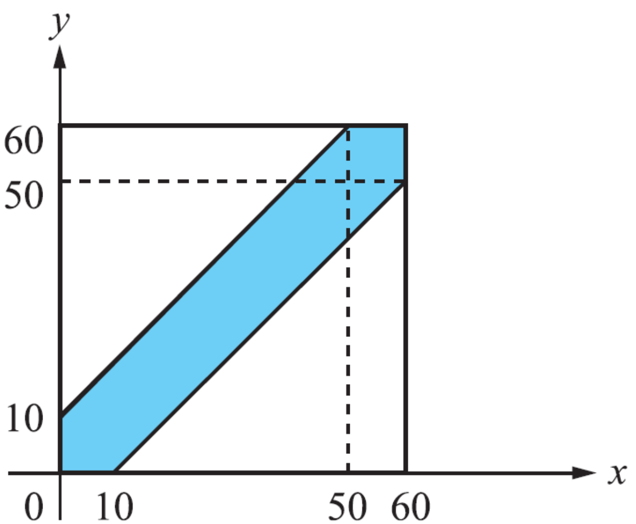
設火車在 9：x 分進站，公車在 9：y 分進站，

直接計算相遇的機率不易求解，

所以可以用 1 –（不會相遇的機率）來求解，

故火車與公車相遇的機率為

$$P = 1 - \frac{1}{60\times 60}\left(\frac{50\times 50}{2}\times 2\right) = \frac{11}{36}$$ 。



2-1
2-2
2-3

2. 定理 2：加法定理（addition theorem）

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$爲一機率空間，

(1) 若 A、$B \in \mathscr{F}$，則

① $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$。

② $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$。

③ 若 A、B 爲互斥事件，即$(A \cap B) = \varnothing$，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

(2) 若 A、B、$C \in \mathscr{F}$，則

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)。$$

(3) 若 $A \cap B = \varnothing$，即 A、B 爲互斥集合，一般亦可用+來表示聯集，即 $A + B = A \cup B$，但 $A \cap B \neq \varnothing$時，$A + B$ 就無意義了。

2-1
2-2
2-3

範例 7

設樣本空間 S 爲平面上 $0 \le x \le 1$、$0 \le y \le 1$ 的方塊，且所有(x, y)都一致的機率密度；又設 A 事件爲 $A = \{(x, y): 0 \le x \le 0.5, 0 \le y \le 1\}$，$B$ 事件爲 $B = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 0.25\}$，請問：

(1) A 與 B 是否爲互斥事件？

(2) A 與 B 是否互爲獨立事件？請證明你的答案。

解

(1) 因

$A \cap B = \{(x, y)：0 \le x \le 0.5，0 \le y \le 0.25\} \ne \varnothing$，

故 A、B 不爲互斥事件。

(2) 由幾何機率定義可知

$$P(A) = \frac{0.5 \times 1}{1 \times 1} = 0.5，$$

$$P(B) = \frac{1 \times 0.25}{1 \times 1} = 0.25，$$

$$P(A \cap B) = \frac{0.5 \times 0.25}{1 \times 1} = 0.125 = P(A)P(B)，$$

故 A、B 爲獨立事件。

2-1
2-2
2-3

範例 8

設 W、X 及 Y 各爲某個隨機實驗中的事件，請問下列事件的出現機率如何表達：

(1) 僅出現這三種事件中的任一種。

(2) 出現這三種事件中的至少一種。

解

(1) 因$(X\cap Y^c\cap W^c)$爲僅 X 事件發生，$(X^c\cap Y\cap W^c)$爲僅 Y 事件發生，因$(X^c\cap Y^c\cap W)$爲僅 W 事件發生，故三事件中僅有一事件發生的機率爲 $P\{(X\cap Y^c\cap W^c)\cup(X^c\cap Y\cap W^c)\cup(X^c\cap Y^c\cap W)\}$。

(2) 三事件有一件以上發生的機率爲

$$P(X\cup Y\cup W)=P(X)+P(Y)+P(W)-P(X\cap Y)-P(Y\cap W)-P(W\cap X)+P(X\cap Y\cap W)。$$

2-2 條件機率(Conditional Probability)

2-1
2-2
2-3

在機率論中，條件機率是非常重要且常用的概念，以電子產品代工而言，如 iphone 手機的代工組裝可能來自不同的臺灣廠商，其代工品質與良率亦不同，如果要研究某一件不良品是來自某一家代工廠的機率時，就會用到條件機率，本節將介紹條件機率、全機率定理與貝氏定理如下：

一、定義

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若 A、$B \in \mathscr{F}$為兩事件，且 $P(A) > 0$，則

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

稱為在發生事件 A 的情況下，事件 B 發生的條件機率。

2-1
2-2
2-3

範例 9

在此作某實驗如下：從$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$隨機選取一個整數 N_1，再從$\{1,\cdots, N_1\}$隨機選取一個整數 N_2，然後再從$\{1,\cdots, N_2\}$隨機選取一個整數 N_3：

(1) 若設$\{N_2 = 4\}$，請計算事件$\{N_1 = 5\}$的發生機率。

(2) 若設$\{N_1 = 5\}$，請計算事件$\{N_3 = 2\}$的發生機率。

解

(1) 因

$$P\{N_2 = 4\} = P\{N_1 = 6，N_2 = 4\} + P\{N_1 = 5，N_2 = 4\} + P\{N_1 = 4，N_2 = 4\}$$
$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}，$$

故

$$P\{N_1 = 5 \mid N_2 = 4\} = \frac{P\{N_1 = 5，N_2 = 4\}}{P\{N_2 = 4\}}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{12}{37}。$$

2-1
2-2
2-3

(2) 因

$$P\{N_1=5\mid N_3=2\}=P\{N_1=5，N_2=5，N_3=2\}+P\{N_1=5，N_2=4，N_3=2\}$$
$$+P\{N_1=5，N_2=3，N_3=2\}+P\{N_1=5，N_2=2，N_3=2\}$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$$

故

$$P\{N_3=2\mid N_1=5\}=\frac{P\{N_1=5，N_3=2\}}{P\{N_1=5\}}$$
$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}$$
$$=\frac{77}{300}。$$

2-1
2-2
2-3

二、性質

1. 定理 1

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若 A、B、$C \in \mathscr{F}$，且 $P(A) > 0$，則

(1) $P(\varnothing \mid A) = 0$、$P(A \mid A) = 1$。

(2) $P(B^c \mid A) = 1 - P(B \mid A)$。

(3) $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(B \cap C \mid A)$。

(4) $P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A) = P(A \mid B) \times P(B)$。

2-1
2-2
2-3

範例 10

設某工廠生產 20 件產品，其中 5 個產品有瑕疵，若連續由該工廠任意買走 2 件產品並且買走不再退回，則兩件均爲瑕疵的機率爲何？

解

若 A 表示買走第一件爲瑕疵品，B 表示買走第二件爲瑕疵品，則

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$ 。

2-1
2-2
2-3

2. 定理 2： 乘法定理（multiplicative theorem）

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若有事件 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n \in \mathscr{F}$，且

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n) > 0$，則

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \cdots\cdots \times P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_{n-1})$$

NOTE： 設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若 A、B、$C \in \mathscr{F}$，且 $P(A \cap B \cap C) > 0$，則

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid A \cap B) = P(A \cap B) \times P(C \mid A \cap B)$$。

3. 全機率定理（Total probability theorem）：

當一個試驗的樣本空間可完整無遺漏的表示為一群互斥集合的聯集時，則分別計算所求事件與這一群互斥集合各個同時發生的機率總和，即為所求事件發生的機率，此概念即為全機率定理，詳述如下：

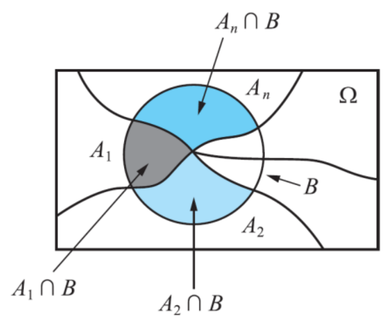


圖 2-2

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若 $B \in \mathscr{F}$ 且 A_1、A_2、……、A_n 為互斥事件，如圖 2-2，滿足

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n$$

即

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots\cdots + P(A_n) = 1$$

且 $P(A_k) > 0$（$\forall k = 1, 2, \cdots\cdots, n$），則

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots\cdots + P(B \mid A_n)P(A_n)$$

2-1
2-2
2-3

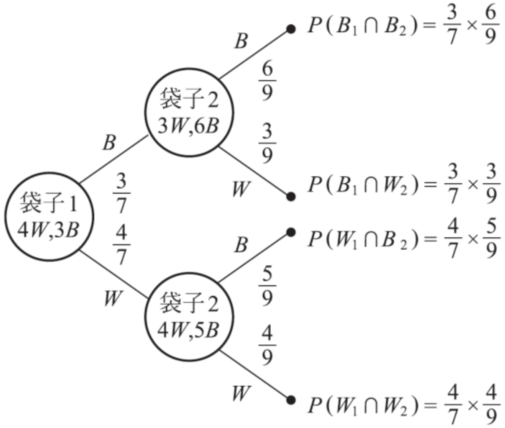
範例 11

第一個袋子裡有白球 4 個和黑球 3 個，第二個袋子裡有白球 3 個和黑球 5 個，現在從第一個袋子取出一球放入第二個袋子，過程中完全不讓人看見球；最後再從第二個袋子中抽取一球，請問此球爲黑球的機率爲何？

解

令 B_i 爲從第 i 個袋子取出黑球的事件，W_i 爲從第 i 個袋子取出白球的事件，由全機率定理（Total probability theorem）可知，從第二個袋子取出黑球的機率爲

$$P(B_2) = P(B_2 \mid B_1)P(B_1) + P(B_2 \mid W_1)P(W_1)$$
$$= \frac{6}{9}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{7}=\frac{38}{63}\text{ 。}$$



2-1
2-2
2-3

4. Bayes 定理

由條件機率可知 $P(A \mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，$P(B \mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$，其中 $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，則 $P(A\mid B)=\dfrac{P(B\mid A)\times P(A)}{P(B)}$，此概念即為貝氏定理的由來，而貝氏定理一般會結合全機率定理描述如下：

設$(\Omega,\mathscr{F},P)$為一機率空間，若 $B\in\mathscr{F}$ 且 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 為互斥事件，滿足

$$\Omega=A_1\cup A_2\cup\ \cdots\cdots\ \cup A_n$$

即 $P(A_1)+P(A_2)+\ \cdots\cdots\ +P(A_n)=1$

且 $P(A_k)>0$ $(\forall k=1, 2, \cdots\cdots, n)$、$P(B)>0$，則$\forall k=1, 2, \cdots\cdots, n$

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B\mid A_k)P(A_k)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+\cdots\cdots+P(B\mid A_n)P(A_n)}$$

其中

$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+\ \cdots\cdots\ +P(B\mid A_n)P(A_n)$$

2-1
2-2
2-3

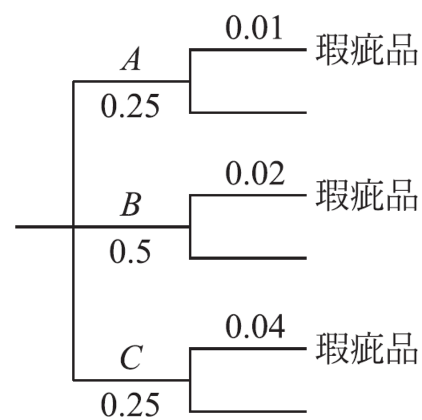
範例 12

某台電阻器的可能製造商有 A、B、C 三家，若改以機率表達，則來自這三家廠商的機率各為 $P_A = 0.25$、$P_B = 0.50$ and $P_C = 0.25$，而這三家廠商製造電阻器出現瑕疵的機率分別是 0.01、0.02 和 0.04：

(1) 現在隨機選取一台電阻器，請問該電阻器為瑕疵品的機率是多少？

(2) 若不巧選到的正是瑕疵品，請問該電阻器出自製造商 B 之手的機率是多少？

解



(1) 由全機率定理可知，

$$
\begin{aligned}
P(\text{瑕疵品}) &= P(\text{瑕疵品} \mid A)P(A) + P(\text{瑕疵品} \mid B)P(B) \\
&\quad + P(\text{瑕疵品} \mid C)P(C) \\
&= 0.01 \times 0.25 + 0.02 \times 0.5 + 0.04 \times 0.25 \\
&= 0.0225\text{。}
\end{aligned}
$$

(2) 由 Bayes's 定理可知，

$$
P(B \mid \text{瑕疵品}) = \frac{P(\text{瑕疵品} \mid B)P(B)}{P(\text{瑕疵品})} = \frac{0.02 \times 0.5}{0.0225} = \frac{4}{9}\text{。}
$$

2-1
2-2
2-3

範例 13

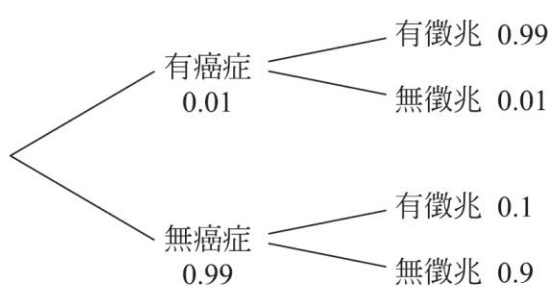
某種癌症被發現每 100 人就會有 1 人有罹患；而罹患這種癌症的人有 99%都會出現 Z 型症候；但即使是沒罹患這種癌症的人也還是有 10%會出現 Z 型症候；請問當一個人身上出現 Z 型症候時，他可能罹患這種癌症的機率有多少，如此機率算是高還是低？

解

由 Bayes's 定理可知，

$$P(\text{癌症} \mid \text{有徵兆}) = \frac{0.01 \times 0.99}{0.01 \times 0.99 + 0.99 \times 0.1} = \frac{1}{11},$$

機率低。



2-1
2-2
2-3

範例 14

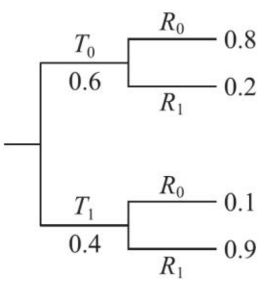
某人利用通訊頻道傳送二位元（0 與 1）訊息，但由於頻道內雜音太多，以至於訊號明明是 0，接收時卻被誤認爲 1 的機率是 0.2，反之訊號明明是 1，接收時卻被誤認爲 0 的機率是 0.1。

(1) 假設通訊源頭傳送 0 的機率是 0.6，傳送 1 的機率是 0.4，因此若你看到傳來的訊號是 0，請問通訊源頭傳送的果眞是 0 的機率有多少？

(2) 假設每個訊號傳送時出錯的事情係各自獨立，若那個人傳送一串四個訊號 0010，請問其中至少有一個訊號傳送出錯的機率是多少？

解

設 T_0 爲發射信號爲 0 的事件，T_1 爲發射信號爲 1 的事件，R_0 爲收到信號爲 0 的事件，R_1 爲收到信號爲 1 的事件，故由題意知



$P(T_0) = 0.6$，$P(T_1) = 0.4$

及

$P(R_1 \mid T_0) = 0.2$，$P(R_0 \mid T_0) = 1 - P(R_1 \mid T_0) = 0.8$

$P(R_0 \mid T_1) = 0.1$，$P(R_1 \mid T_1) = 1 - P(R_0 \mid T_1) = 0.9$

(1) 由 Bayes's 定理可知

$$P(T_0 \mid R_0) = \frac{P(R_0 \mid T_0)P(T_0)}{P(R_0)}$$
$$= \frac{P(R_0 \mid T_0)P(T_0)}{P(R_0 \mid T_0)P(T_0) + P(R_0 \mid T_1)P(T_1)}$$
$$= \frac{0.8 \times 0.6}{0.8 \times 0.6 + 0.1 \times 0.4}$$
$$= \frac{12}{13}$$ 。

(2) 信號 0010 收到全部爲正確的機率爲$(0.8)^3(0.9)$，故至少收到一個不正確符號的機率爲 $1 - (0.8)^3(0.9)$。

2-3 獨立性 (Independence)

前面我們介紹了條件機率 $P(A \mid B)$，其表示兩事件 A、B 中，在 B 事件發生的條件下，A 事件發生的機率，若是 A 事件的發生不受 B 事件發生的影響，即 $P(A \mid B) = P(A)$，則 A、B 兩事件爲獨立事件，就如同兩個同學參加高考考試，若要問在 B 同學考上的條件下 A 同學考上的機率，由於兩位同學是獨立的個體，所以 A 同學考上與否跟 B 同學無關，故兩者爲獨立事件。本節將介紹獨立事件的定義、性質及其應用。

一、定義

獨立事件：

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$爲一機率空間，A、$B \in \mathscr{F}$，事件 A、B 稱爲獨立（independent），若且唯若 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$。並記爲 $A \perp\!\!\!\perp B$，若不滿足上述條件，則稱爲相依事件（dependent events）。即事件 A 發生的機率不受事件 B 發生與否的影響，換句話說 $P(A) = P(A \mid B)$。

範例 15

擲一公正硬幣 n 次，其中事件 A 表示至少出現兩正面，B 事件表示出現一個或兩個反面，求證當 $n=3$ 時，A 與 B 獨立，但是 $n=4$ 時，A 與 B 不是獨立事件。

解

(1) $n=3 \Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{3}{8}=P(A)\times P(B)=\dfrac{4}{8}\times\dfrac{6}{8} \Rightarrow$ 故 A、B 獨立。

(2) $n=4 \Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{10}{16}\neq P(A)\times P(B)=\dfrac{11}{16}\times\dfrac{10}{16} \Rightarrow$ 故 A、B 不是獨立。

二、性質

1. 完全獨立：

設$(\Omega, \mathscr{F}, P)$為一機率空間，若 A、B、$C \in \mathscr{F}$，事件 A、B、C 為完全獨立（mutually independent），若且唯若

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

2. 若事件 A 與 B 為獨立，則 A 與 B^c、A^c 與 B^c、A^c 與 B 均為獨立。

2-1
2-2
2-3

範例 16

3 個人各自朝某個標靶射擊一顆子彈，設 A_i 代表第 i 人射中標靶的事件，$i = 1, 2, 3$；假設 A_1,、A_2,和 A_3 互為獨立事件，且 $Pr(A_1) = 0.7$、$Pr(A_2) = 0.9$、$Pr(A_3) = 0.8$，請計算其中僅 2 人射中標靶的機率（也就是說，另一個人沒射中）。

解

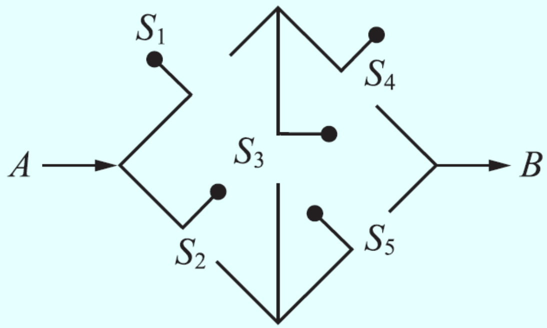
$$
\begin{aligned}
P(\text{恰兩人命中}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\
&= 0.7 \times 0.9 \times (1 - 0.8) + 0.7 \times (1 - 0.9) \times 0.8 + (1 - 0.7) \times 0.9 \times 0.8 \\
&= 0.398
\end{aligned}
$$

。

2-1
2-2
2-3

範例 17

電路圖如圖所示，假設每個電門打開或關上係各自獨立，互不影響，且打開和關上的機率分別為 p 及 $1-p$；現在有個信號進入饋入點，請問該信號最後終能傳送到輸出點的機率為何？



解

$P(S_i)=p$， $P(S_i^c)=1-p$，故

$$P(A\to B)=P(S_3\text{ 且 }A\to B)+P(S_3^c\text{ 且 }A\to B)$$

$$=P[(S_1\cup S_2)\cap(S_4\cup S_5)]+P[(S_1\cap S_4)\cup(S_2\cap S_5)]$$

$$=P(S_1\cup S_2)\times P(S_4\cup S_5)+P[(S_1\cap S_4)\cup(S_2\cap S_5)]$$

$$=(2p-p^2)\times(2p-p^2)+(p^2+p^2-p^4)$$

$$=6p^2-4p^3\text{。}$$