iPB 機率學

01 基礎數學

1-1 集合(Set)

在進入機率學的領域之前，我們必須先談談並複習一下我們在高中職時所學過的集合理論與計數問題（排列與組合）。

在進入機率學的領域之前，我們必須先談談並複習一下我們在高中職時所學過的集合理論與計數問題（排列與組合）。

集合是現代數學中的重要基本概念，在很多領域都會用到，其是在十九世紀末由俄國數學家康托爾（Cantor, 1845～1918）所創，其介紹如下：

一、定義與表示法：

1. 集合：

集合是一些可明確定義（well-defined）的物件（objects）所構成的群體。組成這群體的每一個物件稱爲這個集合的元素。

例如：擲硬幣出現正、反兩種明確物件其集合 $S = \{正, 反\}$。

2. 集合表示法：

(1) 表列式（tabular form）：例如：$A = \{a_1, a_2, a_3\}$，其中 a_1、a_2、a_3 爲 A 的元素。

(2) 結構式（set-builder form）：例如：$A = \{x \mid x \geq 0\}$。

3. 常見的集合：

(1) 可數集合（countable set）：

集合中元素的個數爲有限或無限可數（即元素可排列成一無窮數列或可與自然數 N 一對一的對應），則稱該集合爲可數集合。

例如：$A = \{x \mid x \leq 10$ 且 x 爲正整數$\}$，則 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$爲可數集合。

(2) 不可數集合（uncountable set）：

集合中元素的個數爲無限不可數，即不爲可數集合，則稱該集合爲不可數集合。

例如：$B = \{x \mid x \leq 10$ 且 x 爲實數$\}$，則 B 爲不可數集合。

(3) 宇集（universal set or universe of discourse）：

在研究的問題中，所有應用到的集合均爲某一固定集合的子集合時，該固定的集合稱爲宇集，一般以 Ω 來表示。

例如：擲一公正硬幣的宇集合 $\Omega = \{$正, 反$\}$，

擲一公正骰子的點數字集合 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

(4) 子集合（subset）：

集合 A 中每一個元素均爲集合 B 的元素，則稱 A 爲 B 的子集合。表示成 $A \subset B$（唸成「A 包含於 B」，或「B 包含 A」）。即「$\forall x \in A$，則 $x \in B$ 若且唯若 $A \subset B$」。

(5) 空集合（empty set）：

不含任何元素的集合稱爲空集合，以 $\varnothing$ 表示。空集合爲任何集合的子集合。

4. 文氏圖：

在集合論中，常用平面上簡單封閉的區域來代表集合，此種圖形稱為 Venn-Euler 圖，或文氏圖（Venn diagrams），以下集合的運算，將用文氏圖表示。

二、集合的運算：設 A、B、C 為集合，

1. 相等（equal）：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 若且唯若 $A = B$。
2. 聯集（Union）：$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，如圖 1-1。

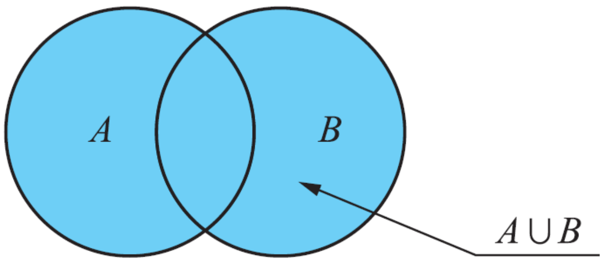


圖 1-1

(1) $x \in A \cup B$ 若且唯若 $x \in A$ 或 $x \in B$。

(2) $x \notin A \cup B$ 若且唯若 $x \notin A$ 且 $x \notin B$。

3. 交集（Intersection）：$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，如圖 1-2。

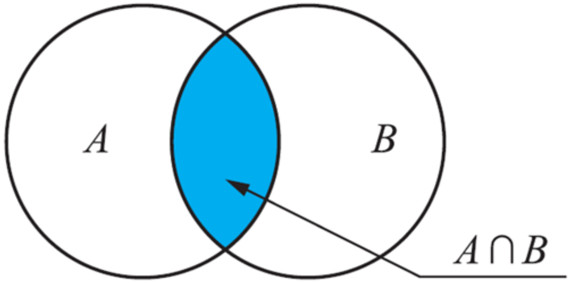


圖 1-2

(1) $x \in A \cap B$ 若且唯若 $x \in A$ 且 $x \in B$。

(2) $x \notin A \cap B$ 若且唯若 $x \notin A$ 或 $x \notin B$。

(3) $A \subseteq (A \cup B)$，$(A \cap B) \subseteq A$。

(4) $A \cap (A \cup B) = A$，$A \cup (A \cap B) = A$。

(5) $A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$。

(6) $A \cup B = \varnothing$若且唯若 $A = B = \varnothing$。

4. 補集（Complements）：

設 Ω 爲宇集，且 $A\subset\Omega$，則 $A^c=\{x \mid x\notin A$ 且 $x\in\Omega\}$，稱爲 A 的補集（有時用 A'或 $\overline{A}$ 來表示），如圖 1-3。

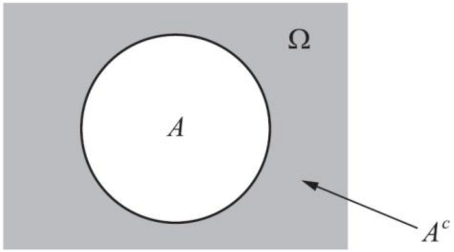


圖 1-3

以擲一公正骰子爲例，其點數之集合 $A=\{1, 2, 5\}$，則其補集合 $A^c=\{3, 4, 6\}$，依此可得下列性質：

(1) $A\cup A^c=\Omega$（宇集）。

(2) $(A^c)^c=A$。

(3) $A\cap A^c=\varnothing$（空集合）。

(4) De Morgan’s law：

① $(A\cup B)^c=(A^c\cap B^c)$，或 $\left(\bigcup_n A_n\right)^c=\left(\bigcap_n A_n^c\right)$。

② $(A\cap B)^c=(A^c\cup B^c)$，或 $\left(\bigcap_n A_n\right)^c=\left(\bigcup_n A_n^c\right)$。

1-1
1-2
1-3

同樣以擲一公正骰子為例，若 $A = \{1, 2, 4\}$，$B = \{3, 4\}$，則$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$，$A^c = \{3, 5, 6\}$，$B^c = \{1, 2, 5, 6\}$且$(A \cup B)^c = \{5, 6\}$，$A^c \cap B^c = \{5, 6\}$，所以 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 說明了 De Morgan's law。

5. 差集（difference）：

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$$

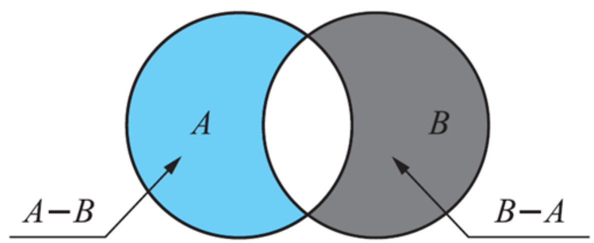


圖 1-4

(1) $A - B = A \cap B^c$。

(2) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$。

範例 1

設宇集合 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 8, 9\}$、$A = \{1, 2, 3\}$、$B = \{2, 4, 6, 8\}$、$C = \{3, 4, 5, 6\}$，求 A^c、$(A \cap C)^c$、$(A \cup B)^c$、$B - C$。

解

$A^c = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$(A \cap C)^c = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，

$(A \cup B)^c = \{0, 5, 7, 9\}$，$B - C = \{2, 8\}$。

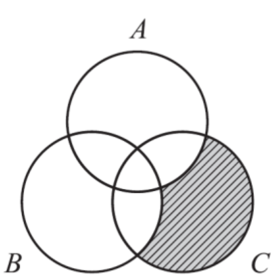
範例 2

請畫出下列各小題的文氏圖

(1) $\overline{(A \cup B)} \cap C$　　(2) $(A \cup C) \cap B$。

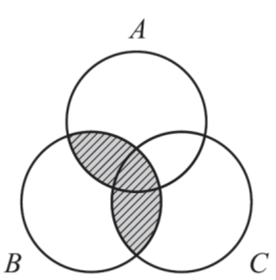
解

(1)



答案如斜線部分

(2)



答案如斜線部分

6. 互斥集合（Disjoint sets）：若 $A \cap B = \varnothing$，則稱集合 A、B 爲互斥集合。

   例如：$A = \{1, 3, 5\}$、$B = \{2, 4, 6\}$，則 $A \cap B = \varnothing$，所以 A、B 爲互斥。

7. 集合中元素的個數：設 $\#A$ 表示 A 中元素的個數，則

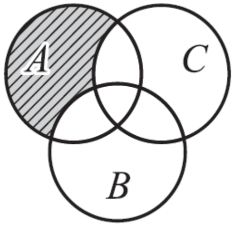
   (1) $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$。

   (2) $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$。

範例 3

某科系調查三位最受歡迎老師 A、B 與 C 之受歡迎情形，同學可以複選，亦可全不選，若喜歡 A 的有 22 人，喜歡 B 的有 25 人，喜歡 C 的有 39 人，喜歡 A 且 B 的有 9 人，喜歡 B 且 C 的有 15 人，喜歡 A 且 C 的有 17 人，同時三人都喜歡的有 6 人，同時三人都不喜歡的亦有 6 人，則只喜歡 A 的有多少人？

解



只喜歡 $A = \#(A) - \#(A\cap B) - \#(A\cap C) + \#(A\cap B\cap C)$

$= 22 - 9 - 17 + 6 = 2$。

1-1
1-2
1-3

三、集合代數的定律：設 A、B、C 為集合

1. 冪等律（Idempotent laws）：

   $A \cup A = A$、$A \cap A = A$。

2. 結合律（Associative laws）：

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$、$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。

3. 交換律（Commutative laws）：

   $A \cup B = B \cup A$、$A \cap B = B \cap A$。

4. 分配律（Distributive laws）：

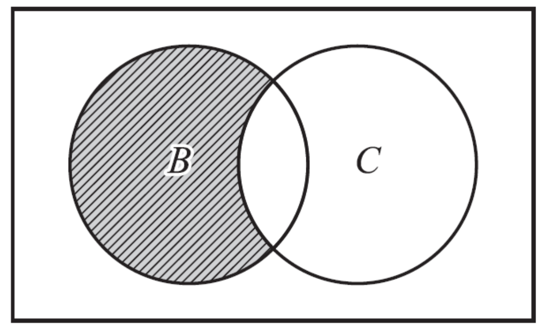
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$、$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

1-1
1-2
1-3

範例 4

設集合 A 表示甲、乙兩種手機中，甲手機暢銷，乙手機滯銷，則集合 $\overline{A}\,(A^c)$ 表示意義爲何？

解



設右圖中斜線部分的文氏圖表示集合 A，

其中 B 集合表示甲手機暢銷，

　　C 集合表示乙手機暢銷，

即 $A = B - C = B \cap \overline{C}$ 或 $B \cap C^c$，

則 $\overline{A} = (B \cap C^c)^c = B^c \cup C$，即甲產品滯銷或乙產品暢銷。

1-2　排列(Permutation)

排列的由來，一般都以 1772 年旺德蒙德（Vander mode）以[n]P 表示由 n 個不同的元素中，每次取 P 個的排列數開始進入有符號運算的排列計算，以下將複習各位在高中職常用的排列計算。

一、相異物直線排列：

1. n 個不同物做直線排列，其排列的方法有 $P_n^n=\dfrac{n!}{0!}=n!$種。

2. 從 n 個不同物中，任取 m（$m\le n$）個做直線排列，其排列的方法有 $P_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}$種。

3. 定義 $0!=1$。

範例 5

(1) 5 個英文字母 a、b、c、d、e 任取 3 個排成一列，排法有幾種？

(2) 9 個同學排成一列，其中 A、B、C 三位同學之間必須有二個人，請問共有幾種排法？

解

(1) $P_3^5=\dfrac{5!}{(5-3)!}=60$ 種。

(2) 排法有 A□□B□□C□□、□□A□□B□□C、□A□□B□□C□，其中□為沒有限制的同學，故有 3 種排法，且 ABC 可互換故有 3!個方法，其他 6 個人可任意排列，因此有 6!種，所以共有 $3\times 3!\times 6!=12960$ 種排法。

二、限制位置的直線排列：

1. n 個相異物排成一列，A 物不排首位的排列數為 $n! - (n-1)!$。
2. n 個相異物排成一列，A 物不排首位且 B 物不排第二位的排列數為 $n! - 2(n-1)! + (n-2)!$。
3. n 個相異物排成一列，A 物不排首位、B 物不排第二位、C 物不排第三位的排列數為 $n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$。

範例 6

一班有 4 位男同學，5 位女同學，選取其中 4 位排成一列，請求下列各種排列數。

(1) 第一位必須為男生。

(2) 第一位必須為男生，最後一位必須為女生。

(3) 第一位及最後一位都必須為女生。

解

(1) 自 4 位男同學任取一位排在第一位有 4 種方法，剩下的 3 位可再由 8 位同學中任取 3 位，故所有的排列數為 $4 \times P_3^8 = 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1344$。

(2) 自 4 位男同學任取一位排在第一位有 4 種方法，自 5 位女同學任取一位排在最後一位有 5 種方法，剩下的 2 位可再由 7 位同學中任取 2 位，故所有的排列數為 $4 \times P_2^7 \times 5 = 4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$。

(3) 自 5 位女同學任取 2 位排在第一位及最後一位的方法有 P_2^5 種方法，剩下的 2 位可再由 7 位同學中任取 2 位，故所有的排列數為 $P_2^5 \times P_2^7 = 5 \times 4 \times 7 \times 6 = 840$。

範例 7

一班有 4 位男同學 5 位女同學排成一列，請求第一位及最後一位至少有一位為女生的排列數。

【提示】「至少一」位的排列均為反求。

解

首末至少一位是女生 ＝（全部排列）－（首末均為男生的排列）

$= 9! - P_2^4 \times 7! = 302400$。

三、重複排列：

從 n 種不同的物中（每種至少有 m 個），任取 m 個排成一列，相同物可重複取用，其排列數為 n^m。

範例 8

6 個不同玩具分給甲、乙、丙三位小朋友，其中甲至少得一件玩具之方法有幾種？

解

甲至少得一件 ＝（全部）－（甲一件未得）$= 3^6 - 2^6 = 665$。

四、不盡相同物的直線排列（Permutation with repetitions）：

有 n 個物中，有 m 種不同種類，其中第 1 類有 k_1 個、第 2 類有 k_2 個、……、第 m 類有 k_m 個，將此 n 個物件排成一列，其排列總數為

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

一般以 $\binom{n}{k_1, k_2, \cdots\cdots, k_m}$ 表示，其中 $n = k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_m$。

範例 9

請問 MISSISSIPPI 這個字裡的字母有多少種不同排列方式？

解

$$\frac{11!}{4!4!2!1!}=34650$$。

1-3　組合(Combination)

1-3 組合(Combination)

1830 年皮科克(Peacock, 1791～1858)引入符號 nCr 來表示由 n 個元素中每次取出 r 個元素的組合數，而後 1869 年劍橋大學的古德文以符號 nPr 來表示由 n 個元素中每次取 r 個元素的排列數，一直到 1880 年鮑茨以 nCr 及 nPr 分別由 n 個不同元素中，每次取出 r 個不重複之排列數與組合數，從此延用此符號與觀念至今，我們在前一節介紹了排列，接著介紹常見的組合。

一、定義：

從 n 個不同物件中，每次選取 m（$m \le n$）個物件爲一組的方法（同一組內的物件不計其順序），稱爲從 n 中取 m 的組合，且其組合總數爲

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

範例 10

某批貨共有物品 8 件，其中 2 件物品有瑕疵：

(1) 若以 3 件作一組，請問共有幾種組合方式。

(2) 求算當中含有 1 件瑕疵品的組數。

(3) 求算當中含有 2 件瑕疵品的組數。

解

(1) $C_3^8=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=56$。

(2) $C_1^2\times C_2^6=2\times\dfrac{6\times5}{2!}=30$。

(3) $C_2^2\times C_1^6=6$。

1-1
1-2
1-3

二、分組的組合：

從 n 個相異物件，分成 m 組，每組含有 k_1、k_2、……、k_m 個物件，令

$$q = C^n_{k_1} \times C^{n-k_1}_{k_2} \times C^{n-k_1-k_2}_{k_3} \times \cdots\cdots \times C^{k_m}_{k_m}$$

1. 若 k_1、k_2、……、k_m 均爲相異，則其分組方法有 q 種。
2. 若 m 組均有組別時，則其分組方法有 q 種。
3. 若 m 組無組別時，若有 s_1 組個數相同、另有 s_2 組個數相同、……、另有 s_j 組個數相同，則其分組方法有 $\dfrac{q}{s_1!s_2!\cdots\cdots s_j!}$ 種。

範例 11

舉行網球雙人賽時將 10 位男孩每 2 人分作一組，請問共有幾種不同分組？

解

$$C_2^{10}\times C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2\times\frac{1}{5!}=945$$ 。

三、重複組合：

從 n 種不同的物中（每種至少有 m 個），任取 m 個物件組合，相同物可重複取用，其組合數為 $H_m^n=C_m^{n+m-1}$ 。

範例 12

將 5 顆相同的珠子放進 5 個不同的盒子，請問共有幾種不同放法？

解

$$H_5^5=C_5^9=\frac{9!}{4!5!}=126$$ 。

四、二項式定理：設 $n\in\mathbb{N}$，

$$(x+y)^n=C_0^n y^n+C_1^n xy^{n-1}+C_2^n x^2y^{n-2}+\cdots\cdots+C_n^n x^n=\sum_{m=0}^{n}C_m^n x^m y^{n-m}$$

例如：

$$(x+y)^3=C_0^3y^3+C_1^3xy^2+C_2^3x^2y+C_3^3x^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

五、常用的公式：

1. $C_m^n=C_m^{n-1}+C_{m-1}^{n-1}$（Pascal’s 定理）。
2. $C_{m+1}^n+2C_m^n+C_{m-1}^n=C_{m+1}^{n+2}$ 。
3. $C_{n-2}^n=C_{n-2}^{n-1}+C_{n-3}^{n-2}+\cdots\cdots+C_1^2+C_0^1$ 。
4. $C_0^n+C_1^n+\cdots\cdots+C_n^n=2^n$ 。
5. $C_0^n+C_2^n+C_4^n+\cdots\cdots=C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots\cdots=2^{n-1}$ 。
6. $C_1^n+2\times C_2^n+\cdots\cdots+n\times C_n^n=n\times 2^{n-1}$ 。
7. $C_1^n-2\times C_2^n+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$。

範例 13

一個由 n 個元素組合的集合總共有多少個子集合？

解

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$ 。

範例 14

排列組合：

(1) 將 6 件不同的獎品發給 4 名學生，每人所得禮物數至少爲 1 件，請問有多少種不同發給方式。

(2) $C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^{25}=$？

解

(1) ① 正面解法：不同物品分給人 $\Rightarrow$ 先分物品，再分人，即

$(1, 1, 1, 3)$ 共有 $\dfrac{C_1^6\times C_1^5\times C_1^4\times C_3^3}{3!}=20$，

$(1, 1, 2, 2)$ 共有 $\dfrac{C_1^6\times C_1^5\times C_2^4\times C_2^2}{2!2!}=45$，

故分法共有$(20+45)\times 4!=1560$。

② 反面解法：

全得 －（1 人不得）＋（2 人不得）－（3 人不得）＋（4 人不得）

即 $4^6-C_1^4\times 3^6+C_2^4\times 2^6-C_3^4\times 1^6+C_4^4\times 0^6=1560$。

(2) 由 Pascal's 定理可知

$$\begin{aligned}C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots+C_2^{25}&=C_3^3+C_2^3+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^{25}\\&=C_3^4+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^{25}\\&\vdots\\&=C_3^{26}=2600\end{aligned}$$
。